Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXIV, No.3, 2014
www.icp.az/2014/3-11.pdf

УДК 517.977

С.Ш. КАДЫРОВА, К.Б. МАНСИМОВ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ РОССЕРА

Рассматривается одна задача оптимального управления дискретными системами Россера при помощи граничных управлений. Получены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Ключевые слова: необходимое условие оптимальности, система Россера, дискретная система, уравнение Эйлера, вариация функционала

1. Введение. Многие процессы из техники описываются различными дискретными двухпараметрическими системами и, в частности, дискретными системами типа Россера (см. напр. [1-8]).

В настоящей работе изучаются процессы, описываемые системами типа Россера и управляемые посредством выбора граничного условия.

Вычислены первая и вторая вариации критерия качества и с их помощью сформулированы неявные критерии оптимальности первого и второго порядков. Используя их, установлены необходимые условия оптимальности, непосредственно выраженные через параметры поставленной задачи.

2. Постановка задачи. Допустим, что управляемый дискретный процесс описывается системой нелинейных разностных уравнений

$$z(t+1,x)=f(t,x,z(t,x),y(t,x)),\ \ t=t_0,t_0+1,...,t_1-1;\ \ x=x_0,x_0+1,...,x_1, \tag{2.1}$$

$$y(t,x+1)=g(t,x,z(t,x),y(t,x)),\ \ t=t_0,t_0+1,...,t_1;\ \ x=x_0,x_0+1,...,x_1-1,$$

с краевыми условиями

$$z(t_0,x+1)=F(x,z(t_0,x),v(x)),\quad x=x_0,x_0+1,...,x_1-1,\ \ t=t_0,t_0+1,...,t_1,$$

$$z(t_0,x_0)=z_0, \tag{2.2}$$

$$z(t,x_0)=b(t). \tag{2.3}$$

Здесь $f(t,x,z,y)$ $(g(t,x,z,y))$ – заданная n (m)-мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z,y) до второго порядка включительно, t_0, t_1, x_0, x_1 – заданы, причем разности t_1-t_0 и x_1-x_0 – есть натуральные числа, z_0 – заданный постоянный вектор, $b(t)$ – заданная дискретная вектор-функция, $F(x,z,v)$ – заданная n-мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z,v) до второго порядка включительно, $v(x)$ – r-мерный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, открытого и ограниченного множества $V\subset R^r$, т.е

$$v(x)\in V\subset R^r,\qquad x=x_0,x_0+1,...,x_1-1. \tag{2.4}$$

Такие управляющие функции назовем допустимыми управлениями, а соответствующий процесс $(v(x),z(t_0,x),z(t,x),\ y(t,x))$ допустимым процессом.

На решениях краевой задачи (2.1)-(2.3), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим функционал

$$S(v)=\varphi(z(t_0,x_1))+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}G_1(x,z(t_1,x_1))+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}G_2(t,y(t_1,x_1)). \qquad (2.5)$$

Здесь $\varphi(z)$, $G_1(x,z)$, $G_2(t,y)$ – заданные скалярные функции непрерывные вмес-те с частными производными по вектору состояния до второго порядка включительно.

Задача заключается в минимизации функционала (2.5) при ограничениях (2.1)-(2.4).

Допустимое управление $v(x)$, доставляющее минимум функционалу (2.5) при ограничениях (2.1)-(2.4), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(v(x),z(t_0,x),z(t,x),\ y(t,x))$- оптимальным процессом.

3. Вариации функционала качества. Считая $(v(x),z(t,x),y(t,x),z(t_0,x))$ - фиксированным допустимым процессом, введем обозначения

$$H(t,x,z,y,p,q)=p'\,f(t,x,z,y)+q'\,g(t,x,z,y),$$
$$M(x,z,v,\psi)=\psi'\,F(x,z,v),$$

где $p(t,x)$, $q(t,x)$ и $\psi(x)$ пока неизвестные вектор-функции.

Через

$$\Delta u_\varepsilon(x)=\varepsilon\,\delta v(t,x) \qquad (3.1)$$

обозначим специальное приращение допустимого управления $v(x)$.

Здесь ε достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta v(x)\in R^r$, $x\in X$ - произвольная ограниченная вектор функция, так называемая допустимая вариация управления [9].

Через $(\Delta z_\varepsilon(t_0,x),\Delta y_\varepsilon(t,x),\Delta z_\varepsilon(t,x))$ обозначим специальное приращение состояния $(z(t_0,x),y(t,x),z(t,x))$.

Теорема 3.1. При сделанных предположениях имеют место разложения

$$\Delta z_\varepsilon(t,x)=\varepsilon\,\delta z(t,x)+o_1(\varepsilon;\,t,x),$$
$$\Delta y_\varepsilon(t,x)=\varepsilon\,\delta y(t,x)+o_2(\varepsilon;\,t,x),$$
$$\Delta z_\varepsilon(t_0,x)=\varepsilon\,\delta z(t_0,x)+o_3(\varepsilon;x). \qquad (3.2)$$

Здесь $(\delta z(t,x),\delta y(t,x),\delta z(t_0,x))$ - вариация вектора состояния $(z(t,x),y(t,x),z(t_0,x))$, являющаяся решением задачи (уравнения в вариациях)

$$\delta z(t+1,x)=f_z(t,x,z(t,x),y(t,x))\delta z(t,x)+f_y(t,x,z(t,x),y(t,x))\delta y(t,x),$$
$$\delta y(t,x+1)=g_z(t,x,z(t,x),y(t,x))\delta z(t,x)+g_y(t,x,z(t,x),y(t,x))\delta y(t,x), \qquad (3.3)$$
$$\delta z(t_0,x)=F_z(x,z(t_0,x),v(x))\delta z(t_0,x)+F_v(x,z(t_0,x),v(x))\delta v(x),$$
$$\delta z(t_0,x_0)=0,\ \ \delta z(t,x_0)=0. \qquad (3.4)$$

Следуя, например, работам [9, 10, 11] при помощи разложений (3.2) доказывается, что первая $(\delta^1 S(v;\,\delta v))$ и вторая $(\delta^2 S(v;\,\delta v))$ вариации функционала $S(v)$ имеют соответственно следующий вид:

$$\delta^1 S(v;\,\delta v)=-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}M'_u(x,z(t_0,x),v(x),\psi(x))\delta v(x), \qquad (3.5)$$

$$\delta^2 S(v;\,\delta v) = \delta z'(t_0, x_1)\frac{\partial^2 \varphi(z(t_0, x_1))}{\partial z^2}\delta z(t_0, x_1) +$$
$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta z'(t_1, x)\frac{\partial^2 G_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2}\delta z(t_1, x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\delta y'(t, x_1)\frac{\partial^2 G_2(y, z(t, x_1))}{\partial y^2}\delta y(t, x_1) -$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Bigg[\delta z'(t, x)\frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x))}{\partial z^2}\delta z(t, x) +$$
$$+\delta z'(t, x)\frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x))}{\partial z\,\partial y}\delta y(t, x) +$$
$$+\delta y'(t, x)\frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x))}{\partial y\,\partial z}\delta z(t, x) +$$
$$+\delta y'(t, x)\frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x))}{\partial y^2}\delta y(t, x)\Bigg] - \tag{3.6}$$
$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Bigg[\delta z'(t_0, x)\frac{\partial^2 M(x, z(t_0, x), v(x), \psi(x))}{\partial z^2}\delta z(t_0, x) + 2\delta v'(x)\times$$
$$\times\frac{\partial^2 M(x, z(t_0, x), v(x), \psi(x))}{\partial u\,\partial z}\delta z(t_0, x) + \delta v'(x)\frac{\partial^2 M(x, z(t_0, x), v(x), \psi(x))}{\partial v^2}\delta v(x)\Bigg].$$

4. Основные результаты. Из общей теории вариационного исчисления (см. напр. [9, с. 47-57; 11, с. 193-210; 12, с. 370-390]) известно, что в случае открытости области управления, вдоль оптимального процесса первая вариация функционала качества равна нулю, а вторая – неотрицательна для всех допустимых вариаций управления $v(x)$.

Следовательно, с учетом (3.5), (3.6) получаем, что для всех $\delta v(x) \in R^r$, $x \in X$ вдоль оптимального процесса $(v(x), z(t_0, x), z(t, x), y(t, x))$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} M'_v(x, z(t_0, x), v(x), \psi(x))\delta v(x) \equiv 0, \tag{4.1}$$

$$\delta z'(t_0, x_1)\frac{\partial^2 \varphi(z(t_0, x_1))}{\partial z^2}\delta z(t_0, x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta z'(t_1, x)\frac{\partial^2 G_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2}\delta z(t_1, x) +$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\delta y'(t, x_1)\frac{\partial^2 G_2(y, z(t, x_1))}{\partial y^2}\delta y(t, x_1) - \tag{4.2}$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Bigg[\delta z'(t, x)\frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x))}{\partial z^2}\delta z(t, x) +$$

$$+\delta z'(t,x)\frac{\partial^2 H(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))}{\partial z\,\partial y}\delta y(t,x)+$$

$$+\delta y'(t,x)\frac{\partial^2 H(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))}{\partial y\,\partial z}\delta z(t,x)+$$

$$+\delta y'(t,x)\frac{\partial^2 H(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))}{\partial y^2}\delta y(t,x)\Bigg]-$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Bigg[\delta z'(t_0,x)\frac{\partial^2 M(x,z(t_0,x),v(x),\psi(x))}{\partial z^2}\delta z(t_0,x)+2\delta v'(x)\times$$

$$\times\frac{\partial^2 M(x,z(t_0,x),v(x),\psi(x))}{\partial v\,\partial z}\delta z(t_0,x)+\delta v'(x)\frac{\partial^2 M(x,z(t_0,x),v(x),\psi(x))}{\partial v^2}\delta v(x)\Bigg]\geq 0.$$

Из тождества (4.1), в силу произвольности допустимой вариации $\delta v(x)\in R^r$, $x\in X$ следует

Теорема 4.1. (аналог уравнения Эйлера). Для оптимальности допустимого управления $v(x)\in U$, $x\in X$ необходимо, чтобы соотношение

$$M_u(\xi,z(t_0,\xi),v(\xi),\psi(\xi))=0 \tag{4.3}$$

выполнялось для всех $\xi\in X$.

Соотношение (4.3) есть аналог уравнения Эйлера, и представляет собой необходимое условие оптимальности первого порядка.

Каждое допустимое управление $v(x)$, удовлетворяющее уравнению Эйлера, следуя например [9, с. 50-53], назовем классической экстремалью.

Ясно, что оптимальное управление также находится среди классических экстремалей.

Необходимое условие оптимальности второго порядка (4.2) в принципе максимума позволяет отсеивать некоторые классические экстремали не являющиеся оптимальными. Но для этого надо, используя его, получить необходимые условия оптимальности второго порядка, пригодные для проверки.

Вернемся к уравнению в вариациях (3.3)-(3.4). Эта система является линейной системой относительно $(\delta z(t_0,x),\delta y(t,x),\delta z(t,x))$.

На основе формулы о представлении решений линейных неоднородных разностных уравнений (см напр. [13, с. 50-51; 14, с. 13-16]) $\delta z(t_0,x)$ представляется в виде

$$\delta z(t_0,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}\Phi(x,s)F_v(s)\delta u(s)\delta v(s). \tag{4.4}$$

Здесь $\Phi(x,s)$ – $(n\times n)$ матричная функция являющаяся решением задачи

$$\Phi_s(x,s-1)=\Phi(x,s)F_z(s,z(t_0,s),v(s)),$$

$$\Phi(x,x-1)=E_1 \quad (E_1 - (n\times n) \text{ единичная матрица}).$$

Далее, через $V_{ij}(t,x;\,\tau,s)$, $i=1,2$ обозначим решение задач

$$V_{11}(t,x;\,\tau-1,s)=V_{11}(t,x;\,\tau,s)\,f_z(\tau,s)+V_{12}(t,x;\,\tau,s)g_z(\tau,s),$$

$$V_{12}(t,x;\,\tau,s-1)=V_{11}(t,x;\,\tau,s)\,f_z(\tau,s)+V_{12}(t,x;\,\tau,s)g_y(\tau,s),$$

$$V_{21}(t,x;\,\tau-1,s)=V_{21}(t,x;\,\tau,s)\,f_z(\tau,s)+V_{22}(t,x;\,\tau,s)g_z(\tau,s),$$

$$V_{22}(t,x;\,\tau,s-1)=V_{21}(t,x;\,\tau,s)\,f_z(\tau,s)+V_{22}(t,x;\,\tau,s)\,g_z(\tau,s),$$
$$V_{11}(t,x;\,t-1,x-1)=E_1,\quad V_{22}(t,x;\,t-1,x-1)=E_2,$$
$$V_{11}(t,x;\,t-1,s)=0,\quad x_0\le s\le x-2,$$
$$V_{12}(t,x;\,\tau,x-1)=0,\quad t_0\le\tau\le t-1,$$
$$V_{21}(t,x;\,t-1,s)=0,\quad x_0\le s\le x-1,$$
$$V_{22}(t,x;\,\tau,x-1)=0,\quad t_0\le\tau\le t-2.$$

На основе результатов работы [15] получаем, что решение $(\delta z(t,x),\delta y(t,x))$ задачи (3.3)-(3.4) допускает представление

$$\delta z(t,x)=V_{11}(t,x+1;\,t_0-1,x)\delta z(t_0,x)+\sum_{s=x_0}^{x-1}V_{11}(t,x+1;\,t_0-1,s)\delta z(t_0,s),\tag{4.5}$$

$$\delta y(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}V_{21}(t+1,x;\,t_0-1,s)\delta z(t_0,s).\tag{4.6}$$

Отсюда, принимая во внимание представление (4.4) для $\delta z(t_0,s)$, будем иметь

$$\delta z(t,x)=$$
$$=\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[V_{11}(t,x+1;\,t_0-1,x)\Phi(x,s)F_v(s)+\sum_{\tau=s+1}^{x-1}V_{11}(t,x+1;\,t_0-1,\tau)\Phi(\tau,s)F_v(s)\right]\delta u(s),\tag{4.7}$$

$$\delta y(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[\sum_{\tau=s+1}^{x-1}V_{21}(t+1,x;\,t_0-1,\tau)\Phi(\tau,s)F_v(s)\right]\delta u(s).\tag{4.8}$$

Полагая

$$Q_1(t,x,s)=\sum_{\tau=s+1}^{x-1}V_{11}(t,x+1;\,t_0-1,\tau)\Phi(\tau,s)+V_{11}(t,x+1;\,t_0-1,x)\Phi(x,s),$$
$$Q_2(t,x,s)=\sum_{\tau=s+1}^{x-1}V_{21}(t+1,x;\,t_0-1,\tau)\Phi(\tau,s),$$

формулы (4.7), (4.8) записываются соответственно в виде

$$\delta z(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}Q_1(t,x,s)F_v(s)\delta v(s),\tag{4.9}$$

$$\delta y(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}Q_2(t,x,s)F_v(s)\delta v(s).\tag{4.10}$$

Используя представления (4.4), (4.9), (4.10), займемся преобразованием членов неравенства (4.2). Следуя схемам работ [7, 10, 14, 16] и др., доказывается, что

$$\delta z'(t_0,x_1)\frac{\partial^2\varphi(z(t_0,x_1))}{\partial z^2}\delta z(t_0,x_1)=$$
$$=\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\delta v'(s)F_v'(s)\Phi'(x_1,s)\frac{\partial^2G_1(x,z(t_1,x_1))}{\partial z^2}F_v(\tau)\Phi(x_1,\tau)\delta v(\tau),\tag{4.11}$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta z'(t_1,x)\frac{\partial^2 G(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\delta z(t_1,x)=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(\sum_{s=x_0}^{x-1}\delta v'(s)F_v'(s)Q_1'(t_1,x,s)\right)\times$$

$$\times\frac{\partial^2 G(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\left(\sum_{\tau=x_0}^{x-1}Q_1(t_1,x,\tau)F_v(\tau)\delta v(\tau)\right)=\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\delta v'(s)F_v'(s)\times \tag{4.12}$$

$$\times\left[\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}Q_1'(t_1,x,s)\frac{\partial^2 G_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}Q_1(t_1,x,\tau)\right]F_v(\tau)\delta v(\tau).$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\delta y'(t,x_1)\frac{\partial^2 G_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}\delta y(t,x_1)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\delta v'(s)F_v'(s)Q_2'(t,x_1,s)\times$$

$$\times\frac{\partial^2 G_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}Q_2(t,x_1,\tau)F_v(\tau)\delta v(\tau)=\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\delta v'(s)F_v'(s)\times \tag{4.13}$$

$$\times\left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1}Q_2'(t,x_1,s)\frac{\partial^2 G_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}Q_2(t,x_1,\tau)\right]F_v(\tau)\delta v(\tau),$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta z'(t,x)H_{zz}(t,x)\delta z(t,x)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(\sum_{s=x_0}^{x-1}\delta v'(s)F_v'(s)Q_1'(t,x,s)\right)H_{zz}(t,x)\times \tag{4.14}$$

$$\times\left(\sum_{\tau=x_0}^{x-1}Q_1(t,x,\tau)F_v(\tau)\delta v(\tau)\right)=$$

$$=\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\delta v'(s)F_v'(s)\left\{\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}Q_1'(t,x,s)H_{zz}(t,x)Q_1(t,x,\tau)\right\}F_v(\tau)\delta v(\tau),$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta z'(t,x)H_{zy}(t,x)\delta y(t,x)=$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(\sum_{s=x_0}^{x-1}Q_1(t,x,s)F_v(s)\delta v(s)\right)'H_{zy}(t,x)\left(\sum_{\tau=x_0}^{x-1}Q_1(t,x,\tau)F_v(\tau)\delta v(\tau)\right)= \tag{4.15}$$

$$=\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\delta v'(s)F_v'(s)\left\{\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}Q_1'(t,x,s)H_{zy}(t,x)Q_1(t,x,\tau)\right\}F_v(\tau)\delta v(\tau),$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta y'(t,x)H_{yz}(t,x)\delta z(t,x)=$$

$$=\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\delta v'(s)F_v'(s)\left\{\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}Q_2'(t,x,s)H_{yz}(t,x)Q_2(t,x,\tau)\right\}F_v(\tau)\delta v(\tau),$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta y'(t,x)H_{yy}(t,x)\delta y(t,x)=$$

$$= \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\delta v'(s)F_v'(s)\left\{\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}Q_2'(t,x,s)H_{yy}(t,x)Q_2(t,x,\tau)\right\}F_v(\tau)\delta v(\tau). \qquad (4.16)$$

Далее, при помощи представления (4.4) получаем, что

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta z'(t_0,x)M_{zz}(x)\delta z(t_0,x)=$$

$$= \sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(\sum_{s=x_0}^{x-1}\delta v'(s)F_v'(s)\Phi'(x,s)\right)M_{zz}(x)\left(\sum_{\tau=x_0}^{x-1}\Phi(x,\tau)F_v(\tau)\delta v(\tau)\right)= \qquad (4.17)$$

$$= \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\delta v'(s)F_v'(s)\left\{\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}\Phi'(x,s)M_{zz}(x)\Phi(x,\tau)\right\}F_v(\tau)\delta v(\tau),$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta v'(x)M_{uy}(x)\delta z(t_0,x)=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\sum_{s=x+1}^{x_1-1}\delta v'(s)M_{uy}(s)\Phi(s,x)\right]M_{zz}(x)F_v(x)\delta v(x). \qquad (4.18)$$

Введем в рассмотрение матричную функцию

$$K(\tau,s)=-\Phi'(x_1,s)\frac{\partial^2\varphi(z(t_0,x_1))}{\partial z^2}\Phi(x,\tau)-\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}Q_1'(t_1,x,s)\frac{\partial^2 G_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\times$$

$$\times Q_1(t_1,x,\tau)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}Q_2'(t,x_1,s)\frac{\partial^2 G_2(t,z(t,x_1))}{\partial y^2}Q_2(t,x_1,\tau)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}\Big[Q_1'(t,x,s)H_{zz}(t,x)Q_1(t,x,\tau)+Q_1'(t,x,s)H_{zy}(t,x)Q_2(t,x,\tau)+$$

$$+Q_2'(t,x,s)H_{yz}(t,x)Q_1(t,x,\tau)+Q_2'(t,x,s)H_{yy}(t,x)Q_2(t,x,\tau)\Big]+ \qquad (4.19)$$

$$+\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{t_1-1}\Phi'(x,s)M_{zz}(x)\Phi(x,\tau).$$

С учетом тождеств (4.11)-(4.18), принимая во внимание обозначение (4.19) в неравенстве (4.2), приходим к утверждению

Теорема 4.1. Для оптимальности классической экстремали $v(x)$ в задаче (2.1)-(2.5) необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\delta v'(s)F_v'(s)K(s,\tau)F_v(\tau)\delta v(\tau)+$$

$$+\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\left[\sum_{s=x+1}^{x_1-1}\delta v'(s)M_{uz}(s)\Phi(s,x)\right]F_v(x)\delta v(x)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta v'(x)M_{vv}(x)\delta v(x)\le 0 \qquad (4.20)$$

выполнялось для всех $\delta v(x)\in R^r$, $x\in X$.

Неравенство (4.20) является многоточечным необходимым условием оптимальности второго порядка.

Приведем одно следствие, вытекающее из теоремы 4.1.

Следствие 4.1. Для оптимальности классической экстремали в задаче (2.1)-(2.5) необходимо, чтобы неравенство

$$w'\left[F_v'(\xi)K(\theta,\xi)F_v(\xi)\right]w\le 0 \qquad (4.21)$$

выполнялось для всех $\xi \in X$, $w \in R^r$.

Заметим, что необходимое условие оптимальности (4.21) слабее, чем (4.20).

Заметим, что (4.4) представляет собой аналог условия оптимальности Габасова-Кирилловой (см. напр. [17]).

5. Заключение. В работе рассмотрена задача оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами типа Россера. Процесс управляется посредством выбора краевого условия. Установлен аналог уравнения Эйлера. Выведено общее необходимое условие оптимальности второго порядка, из которого, в частности, следует аналог условия Габасова-Кирилловой.

Литература

1. Барышев В.Г., Блюмин С.Л. К управлению системами с многомерными параметрами // Автоматика и телемеханика. 1977, № 4, с. 34-42.
2. Блюмин С.Л., Фараджев Р.Г. Линейные клеточные машины: подход пространства состояний // Автоматика и телемеханика, 1982, № 2, с. 125-163.
3. Васильев О.В., Кириллова Ф.М. Об оптимальных процессах в двухпараметрических дискретных системах. Докл. АН СССР. 1967, т. 175, № 1, с. 17-19.
4. Гайшун И.В. Многопараметрические системы управления. Минск: Наука и техника, 1996, 199 с.
5. Roesser R.P. A discrete state-space model for linear image processing // IEEE Trans. Autom. Conttrol. 1975, v. AC-20, № 2, pp. 1-10.
6. Koczorek. Two-dimensional linear systems. Berlin. Springer-Verlag. 1985, 398 p.
7. Мансимов К.Б. Оптимизация одного класса дискретных двухпараметрических систем. // Дифференц. уравнения. 1991, № 2, с. 213-218.
8. Дымков М.П. Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления. Минск. Изд-во БГЭУ. 2005, 363 с.
9. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М. Наука, 1973, 256 с.
10. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку, «Елм». 1999, 174 с.
11. Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М. Высшая школа. 2005, 335 с.
12. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М., Наука, 1979, 429 с.
13. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск. Изд-во БГУ, 1973, 256 с.
14. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку. Изд-во БГУ. 2013, 151 с.
15. Кадырова С.Ш., Мансимов К.Б., Масталиев Р.О. Об одном представлении решения линейных разностных уравнений типа Россера // Изв. НАН Азербайджана. Сер. Информатика и проблемы управления. 2013, № 3, с. 12-17.
16. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Баку, Изд-во «ЭЛМ», 2010, 363 с.
17. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности высокого порядка // Препринт ИМ АН БССР. № 30 (155), Минск, 48 с.

УДК 517.977.52

S.Ş. Qədirova, K.B. Mənsimov. Diskret Rosser sistemləri ilə bir optimal idarəetmə məsələsi haqqında.

Məqalədə Rosser fərq tənlikləri sistemi ilə təsvir olunan bir optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. İdarə oblastının açıq olması şərti daxilində optimallıq üçün birinci və ikinci variasiya terminində zəruri şərtlər alınmışdır. Onlardan istifadə edərək baxılan ekstremal məsələdə Eyler tənliyi formasında zəruri şərt alınmışdır. Daha sonra optimallıq üçün konstruktiv yoxlanıla bilən zəruri şərtlər çıxarılmışdır.

Açar sözlər: optimallıq üçün zəruri şərt, Rosser sistemi, diskret sistem, Eyler tənliyi, funksionalın variasiyası

S.Sh. Gadirova, K.B. Mansimov. On one control problem of discrete Roesser systems.

The paper deals with an optimal control problem described by a system of Roesser difference equations. Subject to the openness of control domain, the necessary conditions are obtained in the terms of the first and second variation. Using these conditions, the extremal problem under consideration he necessary condition is obtained in the form of Euler equation. Then the constructively verifiable necessary optimality conditions were described.

Keywords: necessary optimality condition, Rosser system, discrete system, Euler equation, variation of the functional

Институт кибернетики НАНА
Бакинский Государственный Университет

Представлено 28.11.13