

УДК 519.622.2

К.Р. АЙДА-ЗАДЕ, Д.А. АСАДОВА

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ПРИ УПРАВЛЕНИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ ПРОЦЕССАМИ КРАЕВЫМИ И ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ УПРАВЛЯЮЩИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

*Предлагается численный подход к исследованию задач оптимального управления колебательными процессами с краевыми и промежуточными сосредоточенными управлениями. Получены соответствующие аналитические формулы для компонент градиента целевого функционала по управляющим воздействиям, рассматриваемым на классе кусочно-непрерывных функций. Приводятся результаты численных экспериментов на примерах решения модельных задач оптимального управления колебательными процессами с краевыми и промежуточными сосредоточенными управлениями, иллюстрирующие зависимость минимального времени установления колебательных процессов от количества и мест расположения сосредоточенных управляющих воздействий, от параметров процессов, от коэффициента сопротивления среды и прочих факторов.*

**Ключевые слова:** краевые и промежуточные сосредоточенные управления, точечный источник, градиент целевого функционала, минимальное время установления колебательного процесса

**1. Введение.** Задачами управления и вопросами управляемости процессами, описываемыми гиперболическими уравнениями, занимались Ж.-Л. Лионс, А.Г. Бутковский, Ф.П. Васильев, В.А. Ильин и его ученики, Г.Ф. Кулиев, Л. Муравей и другие. Работы В.А. Ильина [1, 2] и его учеников посвящены исследованию задач управления граничными условиями в случае классических гиперболических уравнений второго порядка. В этих работах установлены необходимые и достаточные условия существования управлений из требуемых классов (двусторонних и односторонних; гладких и обобщенных классов функций) в зависимости от того, в каком соотношении находятся длина колебательной системы и финальный момент времени  $T$ ; получены также явные аналитические представления для граничных управлений, обеспечивающих перевод системы, описываемой простейшим волновым уравнением, в заданное состояние. В частности, было установлено, что при управлении колебаниями струны на двух концах минимальное время успокоения равно длине струны, а при управлении на одном конце - удвоенной длине струны. А.Г. Бутковским, Ж.-Л. Лионсом в [3], [4] рассмотрены задачи точечного управления для гиперболического уравнения. В [3, с.176-284] изучены задачи финитного управления. Используя аппарат теории аналитических функций и проблемы моментов, при решении этих задач были получены различные условия управляемости и неуправляемости колебательных процессов. В работе Г.Ф. Кулиева [5, с.82] получены необходимые и достаточные условия оптимальности в виде вариационного неравенства для задачи точечного управления гиперболическим уравнением общего вида.

В отличие от этих работ в данной статье для рассматриваемой задачи оптимального (по быстродействию) управления процессом перевода колебательной системы из одного состояния в другое установление процесса рассматривается в какой-либо  $\delta$ -окрестности требуемого режима, т.е. речь идет о так называемой  $\delta$ -управляемости процессом. Поскольку рассматриваемым в качестве математической модели телеграфным уравнением с сосредоточенными воздействиями, включенными в слагаемое, содержащее функцию Дирака, описываются различные колебательные процессы электрических, акустических, механических и гидродинамических систем, такие как неустановившееся движение жидкости, газа, возникающее в магистральных трубопроводах с промежуточными

насосными станциями, процессы переноса электроэнергии в системах электропередач, колебательные движения струн, стержней, пластин с точечными управлениями, то полученные результаты могут быть отнесены ко многим процессам, описываемым гиперболическими системами уравнений.

Целью исследований, проводимых в данной работе, является выяснение зависимости оптимального времени установления колебательных процессов от количества и мест расположения сосредоточенных управляющих воздействий, от параметров процессов, от коэффициента сопротивления среды и прочих факторов.

**2. Постановка задачи.** Если имеется  $M$  промежуточных сосредоточенных (точечных) воздействий (источников), то движение колебательной системы с учетом сопротивления среды может быть описано следующей системой уравнений гиперболического типа в безразмерных переменных:

$$\begin{cases} -\frac{\partial \eta}{\partial x} + \sum_{i=1}^M u_i(t) \delta(x - \bar{x}_i) = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \alpha \xi, \\ -\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \end{cases} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \bar{x}_i < 1, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

где  $x, t$  – пространственная и временная переменные,  $\alpha$  – коэффициент сопротивления среды,  $\xi = \xi(x, t)$  и  $\eta = \eta(x, t)$  – функции состояния распределенной колебательной системы,  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака,  $\bar{x}_i$  и  $u_i(t)$  – расположение и мощность точечного воздействия  $i$  –того источника,  $i = 1, \dots, M$ ,  $u_i(t) \in L_2[0, T]$ .

Ставится задача перевода колебательной системы, описываемой системой (2.1), из исходного установившегося состояния:

$$\xi(x, 0) = \varphi_{10}(x), \quad \eta(x, 0) = \varphi_{20}(x), \quad (2.2)$$

имевшегося в начальный момент времени  $t = 0$ , в конечное установившееся состояние

$$\xi(x, T) = \varphi_{1T}(x), \quad \eta(x, T) = \varphi_{2T}(x), \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, T], \quad (2.3)$$

где  $T$  – время, после которого в системе установится новое желаемое состояние (2.3).

Здесь пары функций  $\{\varphi_{10}(\cdot), \varphi_{20}(\cdot)\}, \{\varphi_{1T}(\cdot), \varphi_{2T}(\cdot)\}$  можно рассматривать как элементы гильбертова пространства  $H = W_2^1[0, 1] \times W_2^1[0, 1]$

Краевые условия для (2.1) могут быть заданы в одном из следующих видов:

$$\eta(0, t) = v_1(t), \quad \eta(1, t) = v_2(t), \quad (2.4)$$

$$\xi(0, t) = v_1(t), \quad \xi(1, t) = v_2(t), \quad (2.5)$$

$$\xi(0, t) = v_1(t), \quad \eta(1, t) = v_2(t) \text{ или } \eta(0, t) = v_1(t), \quad \xi(1, t) = v_2(t), \quad (2.6)$$

где  $v_i(t) \in L_2[0, T]$ ,  $i = 1, 2$ .

Далее для определенности будем считать, что краевые условия имеют вид (2.5).

Рассматриваемая задача управления процессом (2.1) заключается в том, что требуется найти такие управляющие функции  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_M(t))$  и  $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$ , при которых время проведения переходного процесса  $T$  от начальных условий (2.2) к желаемым конечным условиям (2.3) минимально.

Следует отметить, что на практике невозможно достичь точного значения желаемого режима к какому-либо определенному моменту времени  $T$ , в связи с чем будем считать, что система (2.1) достигла состояния (2.3), если выполняются условия

$$\begin{cases} |\xi(x, t) - \varphi_{1T}(x)| \leq \delta_\xi, \\ |\eta(x, t) - \varphi_{2T}(x)| \leq \delta_\eta, \end{cases} \quad x \in (0, 1), \quad t \geq T, \quad (2.7)$$

где  $\delta_\xi, \delta_\eta$  – заданные положительные малые величины, определяемые в долях или в процентах от значений некоторого установившегося режима  $\{\varphi_{1T}(\cdot), \varphi_{2T}(\cdot)\}$ .

Для численного решения этой задачи привлечем аппарат теории оптимального управления, т.е. рассмотрим задачу оптимального управления процессом (2.1). Целью управления в данной задаче является наиболее быстрый перевод колебательной системы из состояния (2.2) в состояние (2.3) с учетом того факта, что достижение режима (2.3) возможно в смысле (2.7). В связи с этим в качестве критерия качества проведения переходного процесса рассмотрим целевой функционал, состоящий из двух слагаемых: первого слагаемого - минимизируемого момента времени  $T$ , и второго слагаемого, определяющего штраф за нарушение факта  $\delta$  —установления процесса:

$$J(u, v, T) = T + \int_T^{T+DT} \int_0^1 \{r_1[\xi(x, t) - \varphi_{1T}(x)]^2 + r_2[\eta(x, t) - \varphi_{2T}(x)]^2\} dxdt \rightarrow \min. \quad (2.8)$$

Величина  $DT$  — определенный малый заранее заданный интервал времени после момента  $T$  установления процесса, который назначается в зависимости от параметров колебательного процесса;  $r_1, r_2$  — штрафные коэффициенты, стремящиеся к  $+\infty$ .

**3. Численный подход к решению задачи.** Для решения задачи оптимального управления процессом установления колебательных систем, рассматриваемой в данной работе, предлагается использовать итерационные методы оптимизации первого порядка, основанные на применении аналитических формул градиента целевого функционала по управляющим параметрам. При получении соответствующих аналитических формул для компонент градиента целевого функционала предполагается, что управляющие воздействия ищутся на классе кусочно-непрерывных функций. Для численного решения соответствующих краевых задач использованы различные варианты схем метода конечных разностей.

Формулы градиента целевого функционала, выводимые ниже, могут быть использованы также для формулировки необходимых условий оптимальности для рассмотренной задачи. Так как в данной задаче краевые и промежуточные сосредоточенные управления являются взаимно независимыми, то получение формул для соответствующих компонент градиента функционала можно проводить независимо, что и будет сделано ниже.

**3.1. Формулы для компонент градиента функционала по промежуточным управляющим воздействиям.** Покажем, что функционал (2.8) в задаче оптимального управления (2.1), (2.2), (2.5), (2.8) дифференцируем по  $u_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, M$ , в пространстве  $L_2[0, T + DT]$ . Используя метод вариации оптимизируемых функций [7, с.583-590], рассмотрим произвольные допустимые управления  $u_i(t)$ ,  $u_i(t) + \Delta u_i(t) \in L_2[0, T + DT]$ , для какого-либо фиксированного  $i = 1, \dots, M$ . Пусть  $\xi(x, t; u_i)$ ,  $\xi(x, t; u_i + \Delta u_i)$ ,  $\eta(x, t; u_i)$ ,  $\eta(x, t; u_i + \Delta u_i)$  —соответствующие этим управлениям обобщенные решения задачи (2.1), (2.2), (2.5).

Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta \xi(x, t) &= \xi(x, t; u_i + \Delta u_i) - \xi(x, t; u_i), \\ \Delta \eta(x, t) &= \eta(x, t; u_i + \Delta u_i) - \eta(x, t; u_i). \end{aligned}$$

Из (2.1), (2.2), (2.5) следует, что  $\Delta \xi(x, t), \Delta \eta(x, t)$  являются решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} -\frac{\partial \Delta \eta}{\partial x} + \Delta u_i(t) \delta(x - \bar{x}_i) = \frac{\partial \Delta \xi}{\partial t} + \alpha \Delta \xi \\ -\frac{\partial \Delta \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Delta \xi}{\partial x}, \end{cases} \quad x \in (0, 1), t \in (0, T + DT), \quad (3.1)$$

$$\Delta \xi(x, 0) = 0, \quad \Delta \eta(x, 0) = 0, \quad \Delta \xi(0, t) = 0, \quad \Delta \xi(1, t) = 0, \quad (3.2)$$

Тогда приращение функционала (2.8) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 J(u, v, T) &= J(u_i + \Delta u_i, v, T) - J(u_i, v, T) = \\
 &= \int_{T+DT}^{T+DT} \int_0^1 r_1 [\xi(x, t) + \Delta \xi(x, t) - \varphi_{1T}(x)]^2 dxdt - \int_{T+DT}^{T+DT} \int_0^1 r_1 [\xi(x, t) - \varphi_{1T}(x)]^2 dxdt + \\
 &+ \int_{T+DT}^{T+DT} \int_0^1 r_2 [\eta(x, t) + \Delta \eta(x, t) - \varphi_{2T}(x)]^2 dxdt - \int_{T+DT}^{T+DT} \int_0^1 r_2 [\eta(x, t) - \varphi_{2T}(x)]^2 dxdt = \\
 &= \int_{T+DT}^{T+DT} \int_0^1 2r_1 [\xi(x, t) - \varphi_{1T}(x)] \Delta \xi(x, t) dxdt + \int_{T+DT}^{T+DT} \int_0^1 2r_2 [\eta(x, t) - \varphi_{2T}(x)] \Delta \eta(x, t) dxdt + R \\
 &= \int_T^{T+DT} \int_0^1 2r_1 [\xi(x, t) - \varphi_{1T}(x)] \Delta \xi(x, t) dxdt + \int_T^{T+DT} \int_0^1 2r_2 [\eta(x, t) - \varphi_{2T}(x)] \Delta \eta(x, t) dxdt + R \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

где

$$R = r_1 \int_T^{T+DT} \int_0^1 (\Delta \xi(x, t))^2 dxdt + r_2 \int_T^{T+DT} \int_0^1 (\Delta \eta(x, t))^2 dxdt$$

Используя результаты работы [7, с.574], можно доказать, что

$$|R| \leq K \|\Delta u_i\|_{L_2[0, T+DT]}^2, \quad (3.4)$$

где  $K$  – положительная постоянная, не зависящая от  $\xi(x, t)$ ,  $\eta(x, t)$  и  $u_i(t)$ .

Пусть функции  $\psi_1(x, t)$ ,  $\psi_2(x, t)$  являются решением следующей вспомогательной сопряженной краевой задачи:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \begin{cases} -\frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \alpha \psi_1 - 2r_1 [\xi(x, t) - \varphi_{1T}(x)], & T \leq t \leq T + DT, \\ -\frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \alpha \psi_1, & 0 \leq t < T, \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \begin{cases} -\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - 2r_2 [\eta(x, t) - \varphi_{2T}(x)], & T \leq t \leq T + DT, \\ -\frac{\partial \psi_1}{\partial x}, & 0 \leq t < T, \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\psi_1(0, t) = \psi_1(1, t) = 0 \quad 0 \leq t < T + DT \quad (3.7)$$

$$\psi_1(x, T + DT) = 0, \quad \psi_2(x, T + DT) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.8)$$

Учитывая (3.1), (3.2), (3.5)–(3.8) в (3.3), имеем:

$$\begin{aligned}
 \Delta u_i J(u, v, T) &= \int_T^{T+DT} \int_0^1 (-\psi_{1t}(x, t) - \psi_{2x}(x, t) + \alpha \psi_1(x, t)) \Delta \xi(x, t) dxdt + \\
 &+ \int_0^T \int_0^1 (-\psi_{1t}(x, t) - \psi_{2x}(x, t) + \alpha \psi_1(x, t)) \Delta \xi(x, t) dxdt + \\
 &+ \int_T^{T+DT} \int_0^1 (-\psi_{2t}(x, t) - \psi_{1x}(x, t)) \Delta \eta(x, t) dxdt + \int_0^T \int_0^1 (-\psi_{2t}(x, t) - \psi_{1x}(x, t)) \Delta \eta(x, t) dxdt +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 +R &= \int_0^{T+DT} \int_0^1 (-\psi_{1t}(x,t) - \psi_{2x}(x,t) + \alpha\psi_1(x,t)) \Delta\xi(x,t) dxdt + \\
 &+ \int_0^{T+DT} \int_0^1 (-\psi_{2t}(x,t) - \psi_{1x}(x,t)) \Delta\eta(x,t) dxdt + R = \\
 &= \int_0^{T+DT} \int_0^1 \psi_1(x,t) (\Delta\xi_t(x,t) + \Delta\eta_x(x,t) + \alpha\Delta\xi(x,t)) dxdt + \\
 &+ \int_0^{T+DT} \int_0^1 \psi_2(x,t) (\Delta\xi_x(x,t) + \Delta\eta_t(x,t)) dxdt + R = \\
 &= \int_0^{T+DT} \int_0^1 \psi_1(x,t) \Delta u_i(t) \delta(x - \bar{x}_i) dxdt + R = \int_0^{T+DT} \psi_1(\bar{x}_i, t) \Delta u_i(t) dt + R \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Из (3.9) и оценки остаточного члена (3.4) следует, что функционал дифференцируем по  $u_i(t)$  на  $L_2[0, T + DT]$  и его градиент определяется по формуле:

$$grad_{u_i} J(u, v, T) = \psi_1(\bar{x}_i, t), \quad i = 1, \dots, M, t \in [0, T + DT]. \quad (3.10)$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

**Теорема.** Градиент целевого функционала (2.8) по управляющим функциям  $u_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, M$ , определенным на множестве кусочно-непрерывных функций, в задаче оптимального управления (2.1), (2.2), (2.5) (2.8) определяется по формулам (3.10).

**3.2 Формулы для компонент градиента функционала по крайевым управлениям.** Для получения формул градиента функционала по управлению  $v_1(t)$  (для  $v_2(t)$  выводится аналогично) возьмем два допустимых управления  $v_1(t)$ ,  $v_1(t) + \Delta v_1(t) \in L_2[0, T + DT]$ .

Пусть  $\xi(x, t; v_1)$ ,  $\xi(x, t; v_1 + \Delta v_1)$ ,  $\eta(x, t; v_1)$ ,  $\eta(x, t; v_1 + \Delta v_1)$  – решения краевой задачи (2.1), (2.2), (2.5), соответствующие этим управлениям.

Очевидно, что  $\Delta\xi(x, t)$ ,  $\Delta\eta(x, t)$  являются решением следующей краевой задачи, отличающейся от задачи (3.1), (3.2):

$$\begin{cases} -\frac{\partial \Delta\eta}{\partial x} = \frac{\partial \Delta\xi}{\partial t} + \alpha\Delta\xi, \\ \frac{\partial \Delta\eta}{\partial t} = \frac{\partial \Delta\xi}{\partial x}, \end{cases} \quad x \in (0,1), t \in (0, T + DT), \quad (3.11)$$

$$\Delta\xi(x, 0) = 0, \Delta\eta(x, 0) = 0, \Delta\xi(0, t) = \Delta v_1(t), \Delta\xi(1, t) = 0 \quad (3.12)$$

Формула для приращения функционала (2.8), с учетом (3.5)-(3.8) и (3.11), (3.12) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{v_1} J(u, v, T) &= J(u, v_1 + \Delta v_1, T) - J(u, v_1, T) = \\
 &= \int_T^{T+DT} \int_0^1 2r_1[\xi(x,t) - \varphi_{1T}(x)] \Delta\xi(x,t) dxdt + \int_T^{T+DT} \int_0^1 2r_2[\eta(x,t) - \varphi_{2T}(x)] \Delta\eta(x,t) dxdt + R = \\
 &= \int_T^{T+DT} \int_0^1 (-\psi_{1t}(x,t) - \psi_{2x}(x,t) + \alpha\psi_1(x,t)) \Delta\xi(x,t) dxdt +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^T \int_0^1 (-\psi_{1t}(x, t) - \psi_{2x}(x, t) + \alpha\psi_1(x, t)) \Delta\xi(x, t) dx dt + \\
 & + \int_T^{T+DT} \int_0^1 (-\psi_{2t}(x, t) - \psi_{1x}(x, t)) \Delta\eta(x, t) dx dt + \int_0^T \int_0^1 (-\psi_{2t}(x, t) - \psi_{1x}(x, t)) \Delta\eta(x, t) dx dt + \\
 & + R = \int_0^{T+DT} \psi_2(0, t) \Delta v_1(t) dt + \int_0^{T+DT} \int_0^1 \psi_1(x, t) (\Delta\xi_t(x, t) + \Delta\eta_x(x, t) + \alpha\Delta\xi(x, t)) dx dt + R = \\
 & = \int_0^{T+DT} \psi_2(0, t) \Delta v_1(t) dt + R \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функционал дифференцируем по  $v_1(t)$  на  $L_2[0, T + DT]$  и его градиент определяется по формуле:

$$grad_{v_1} J(u, v, T) = \psi_2(0, t), \quad t \in [0, T + DT]. \tag{3.14}$$

Аналогично выводится формула градиента функционала по правому краевому управлению:

$$grad_{v_2} J(u, v, T) = \psi_2(1, t), \quad t \in [0, T + DT].$$

**3.3 Формулы для компонент градиента функционала по моменту времени  $T$ .** Далее будем рассматривать параметр  $T$  как оптимизируемый параметр и выведем формулу для производной функционала по  $T$ . Для этого рассмотрим приращение функционала, соответствующее приращению конечного момента времени  $T$ , т. е.  $\Delta T$ :

$$\begin{aligned}
 & \Delta_T J(u, v, T) = J(u, v, T + \Delta T) - J(u, v, T) = \\
 & = \Delta T + \int_{T+DT+\Delta T}^{T+DT+\Delta T} \int_0^1 r_1 [\xi(x, t) - \varphi_{1T}(x)]^2 dx dt - \int_0^{T+DT} \int_0^1 r_1 [\xi(x, t) - \varphi_{1T}(x)]^2 dx dt + \\
 & + \int_{T+\Delta T}^{T+\Delta T} \int_0^1 r_2 [\eta(x, t) - \varphi_{2T}(x)]^2 dx dt - \int_0^{T+DT} \int_0^1 r_2 [\eta(x, t) - \varphi_{2T}(x)]^2 dx dt = \Delta T + \\
 & + \Delta T \left( \int_0^1 r_1 \{ [\xi(x, T + DT) - \varphi_{1T}(x)]^2 - [\xi(x, T) - \varphi_{1T}(x)]^2 \} dx \right) + \\
 & + \Delta T \left( \int_0^1 r_2 \{ [\eta(x, T + DT) - \varphi_{2T}(x)]^2 - [\eta(x, T) - \varphi_{2T}(x)]^2 \} dx \right) = \\
 & = \Delta T \left[ 1 + \int_0^1 r_1 (\xi(x, T + DT) + \xi(x, T) - 2\varphi_{1T}(x)) (\xi(x, T + DT) - \xi(x, T)) dx + \right. \\
 & \left. + \int_0^1 r_2 (\eta(x, T + DT) + \eta(x, T) - 2\varphi_{2T}(x)) (\eta(x, T + DT) - \eta(x, T)) dx \right]
 \end{aligned}$$

Разделив обе части на  $\Delta T$  и перейдя к пределу при  $\Delta T \rightarrow 0$ , получим формулу для компоненты градиента функционала по  $T$

$$\begin{aligned} grad_T J(u, v, T) = & 1 + \int_0^1 r_1(\xi(x, T + DT) + \xi(x, T) - 2\varphi_{1T}(x)) (\xi(x, T + DT) - \xi(x, T)) dx + \\ & + \int_0^1 r_2(\eta(x, T + DT) + \eta(x, T) - 2\varphi_{2T}(x)) (\eta(x, T + DT) - \eta(x, T)) dx \end{aligned} \quad (3.15)$$

Полученные формулы можно использовать при применении методов первого порядка, в частности, градиентных процедур по нахождению оптимального вектора  $(u(t), v(t), T)$ , включая метод Флетчера–Ривза.

**4. Результаты численных экспериментов.** Как указывалось во введении, одним из основных теоретических результатов, полученных А.Г. Бутковским, В.А. Ильным и его учениками, занимающихся вопросами граничного управления струны, являлся тот факт, что при управлении струной на двух концах минимальное время успокоения равно длине струны, а при управлении на одном конце - удвоенной длине струны. Нами при численном решении задач оптимального управления колебательной системой были подтверждены данные факты.

Целью данной работы являлось исследование зависимости минимального времени установления колебательного процесса от количества и мест расположения промежуточных сосредоточенных (точечных) воздействий (источников), от коэффициента сопротивления среды  $\alpha$ , от разности между значениями параметров начальных и конечных режимов, т.е. от значения  $\Delta \xi(x) = \|\varphi_{1T}(x) - \varphi_{10}(x)\|$ , где  $x \in [0,1]$ ,  $\|\cdot\|$  – метрика в  $W_2^1[0,1]$ , поэтому были поставлены и численно решены задачи оптимального управления колебательными процессами, в которых в качестве управляющих функций рассматривались краевые управления функцией состояния системы на одном (в этом случае на другом конце сразу осуществлялся переход на требуемый конечный режим) или на обоих концах отрезка  $[0,1]$ , а также функции мощности сосредоточенных источников, при этом менялось количество и места расположения управляемых точечных источников.

В таблице 3.1 приводятся модельные данные в безразмерных единицах для шести задач управления колебательными процессами, состоящих из подзадач, в каждой из которых варьировалось число внутренних сосредоточенных управляющих воздействий  $M$  от одного до четырех.

Значение одной из функций состояния системы в начальный и конечный моменты времени предполагалось стационарным (установившимся), в частности,  $\varphi_{10}(x) = const = \varphi_{10}$ ,  $\varphi_{1T}(x) = const = \varphi_{1T}$ , причем эти значения рассматривались в качестве параметров задачи управления колебательным процессом. В этой таблице и далее приняты следующие обозначения:  $\alpha$  – коэффициент сопротивления среды,  $\varphi_{10}$  – значение функции состояния  $\xi(x, 0)$  при начальном установившемся режиме,  $\varphi_{1T}$  – значение состояния  $\xi(x, T)$  при конечном установившемся режиме,  $\eta_0(0)$  – значение состояния  $\eta(0, 0)$  на левом конце отрезка  $[0,1]$  при начальном стационарном режиме,  $\eta_T(0)$  – значение состояния  $\eta(0, T)$  на левом конце отрезка  $[0,1]$  при конечном установившемся режиме,  $T_{opt}$  – оптимальное время установления колебательного процесса,  $f_0^i(0)$  – мощность  $i$  – того источника в начальный момент времени при начальном установившемся режиме.

Задачи оптимального управления колебательными процессами исследовались на классе кусочно-непрерывных функций.

Таблица 3.1

Параметры шести модельных задач управления колебательными процессами с  
 краевыми и промежуточными сосредоточенными управлениями

№ задачи	Параметры колебательных процессов в рассматриваемых задачах				
	$\alpha$	$\varphi_{10}$	$\varphi_{1T}$	$\eta_0(0)$	$\eta_T(0)$
<i>I</i>	2,112	1	1.5	3,72	5,34-
<i>II</i>	3,168	1	1.5	3,72	5,34
<i>III</i>	2,112	1	2	3,1	5,17
<i>IV</i>	2,112	1	3	3,87	7,05
<i>V</i>	1,408	1	2	3,1	5,17
<i>VI</i>	2,112	1	4	3,23	9,38

В качестве примера приведем вид функции состояния  $\eta(x)$  для задачи *I* (см. первую строку таблицы 3.1) в случае четырех промежуточных сосредоточенных источников (ПСИ) при начальном установившемся режиме (при  $t = 0$ )

$$\eta_0(x) = \begin{cases} \eta_0(0) - \alpha\varphi_{10}x = 3,72 - 2,112x, & 0 \leq x < \bar{x}_1, \\ 3,72 - 2,112(x - \bar{x}_1), & \bar{x}_1 \leq x < \bar{x}_2, \\ 3,72 - 2,112(x - \bar{x}_2), & \bar{x}_2 \leq x < \bar{x}_3, \\ 3,72 - 2,112(x - \bar{x}_3), & \bar{x}_3 \leq x < \bar{x}_4, \\ 3,72 - 2,112(x - \bar{x}_4), & \bar{x}_4 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

и при конечном установившемся режиме (при  $t = T$ )

$$\eta_T(x) = \begin{cases} \eta_T(0) - \alpha\varphi_{1T}x = 5,34 - 3,168x, & 0 \leq x < \bar{x}_1, \\ 5,34 - 3,168(x - \bar{x}_1), & \bar{x}_1 \leq x < \bar{x}_2, \\ 5,34 - 3,168(x - \bar{x}_2), & \bar{x}_2 \leq x < \bar{x}_3, \\ 5,34 - 3,168(x - \bar{x}_3), & \bar{x}_3 \leq x < \bar{x}_4, \\ 5,34 - 3,168(x - \bar{x}_4), & \bar{x}_4 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

На примере управления колебательными процессами *I*, *III* и *VI* (табл. 3.1) рассмотрим графики полученных оптимальных управлений при решении задач оптимального управления с одним ПСИ, когда наряду с граничным управлением колебательным процессом производится также управление промежуточным сосредоточенным источником.

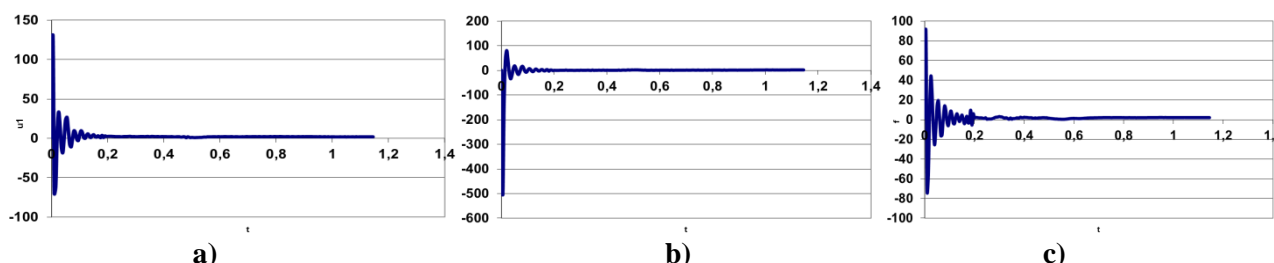


Рис 1. Графики оптимальных кусочно-непрерывных управлений колебательным процессом для задачи *III*: управление на левом конце (а), управление на правом конце (б), управление ПСИ, расположенным в точке  $\bar{x}_1 = 0,5$  (с).

В таблице 3.2 представлены минимальные времена установления колебательных процессов для задач I, III и VI при различных расположениях промежуточного сосредоточенного управления

**Таблица 3.2**

**Значения минимального времени установления колебательных процессов в задачах I, III и VI при различном расположении промежуточного сосредоточенного управления**

$\bar{x}_1$	$f_0^1(0)$	$T_{opt}$		
		I задача	III задача	VI задача
0,1	0,2112	0,95	1	1,05
0,2	0,4224	0,85	0,85	0,9
0,3	0,6336	0,75	0,75	0,8
0,4	0,8448	0,85	0,85	0,95
0,5	1,056	1,05	1,05	1,1
0,6	1,2672	0,85	0,85	0,95
0,7	1,4784	0,75	0,75	0,8
0,8	1,6896	0,85	0,85	0,9
0,9	1,9008	0,95	0,95	1,05

В таблице 3.3 приведены полученные значения минимальных времен для переходных процессов в задачах I, III и VI при наличии двух ПСИ (т.е. имеется 4 управляющих воздействия: 2 из них- это управление на концах отрезка [0,1], 2 других- управление промежуточными точечными воздействиями)

**Таблица 3.3**

**Значения минимального времени установления переходных процессов в задачах I, III и VI при различных расположениях двух ПСИ**

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$	$(f_0^1(0), f_0^2(0))$	$T_{opt}$		
		I задача	III задача	VI задача
(0,1; 0,9)	(0,2112; 1,6896)	0,85	0,87	0,94
(0,2; 0,8)	(0,4224; 1,2672)	0,65	0,69	0,75
(0,3; 0,7)	(0,6336; 0,8448)	0,66	0,69	0,74
(0,332; 0,668)	(0,7012; 0,7096)	0,72	0,75	0,84
(0,4; 0,6)	(0,8448; 0,4224)	0,63	0,69	0,76
(0,1; 0,2)	(0,2112; 0,2112)	0,82	0,85	0,94
(0,2; 0,3)	(0,4224; 0,2112)	0,75	0,78	0,85
(0,3; 0,4)	(0,6336; 0,2112)	0,65	0,68	0,75
(0,4; 0,5)	(0,8448; 0,2112)	0,64	0,67	0,79
(0,5; 0,6)	(1,056; 0,2112)	0,62	0,67	0,79
(0,6; 0,7)	(1,2672; 0,2112)	0,66	0,68	0,75
(0,7; 0,8)	(1,4784; 0,2112)	0,74	0,78	0,85
(0,8; 0,9)	(1,6896; 0,2112)	0,83	0,85	0,94

На рис.2 приводятся графики оптимальных управлений мощностями двух ПСИ для задачи VI (графики краевых управлений аналогичны изображенным на рис. 1 (a),(b))

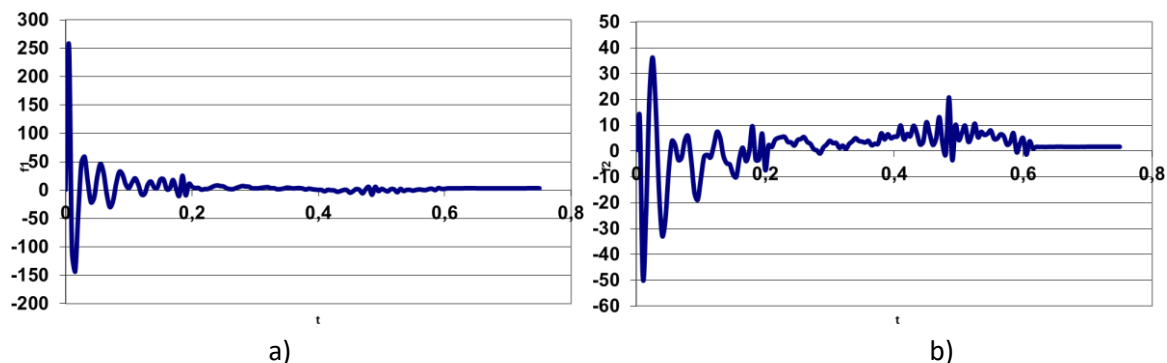


Рис. 2. Графики оптимальных управляющих воздействий (ПСИ) в задаче VI при:  
 а)  $\bar{x}_1 = 0,4$ ; б)  $\bar{x}_2 = 0,8$ .

В табл. 3.4 приводятся результаты решения задач оптимального управления I, III и VI при наличии трех ПСИ

Таблица 3.4  
 Минимальное время установления колебательных процессов в задачах I, III и VI при наличии трех ПСИ

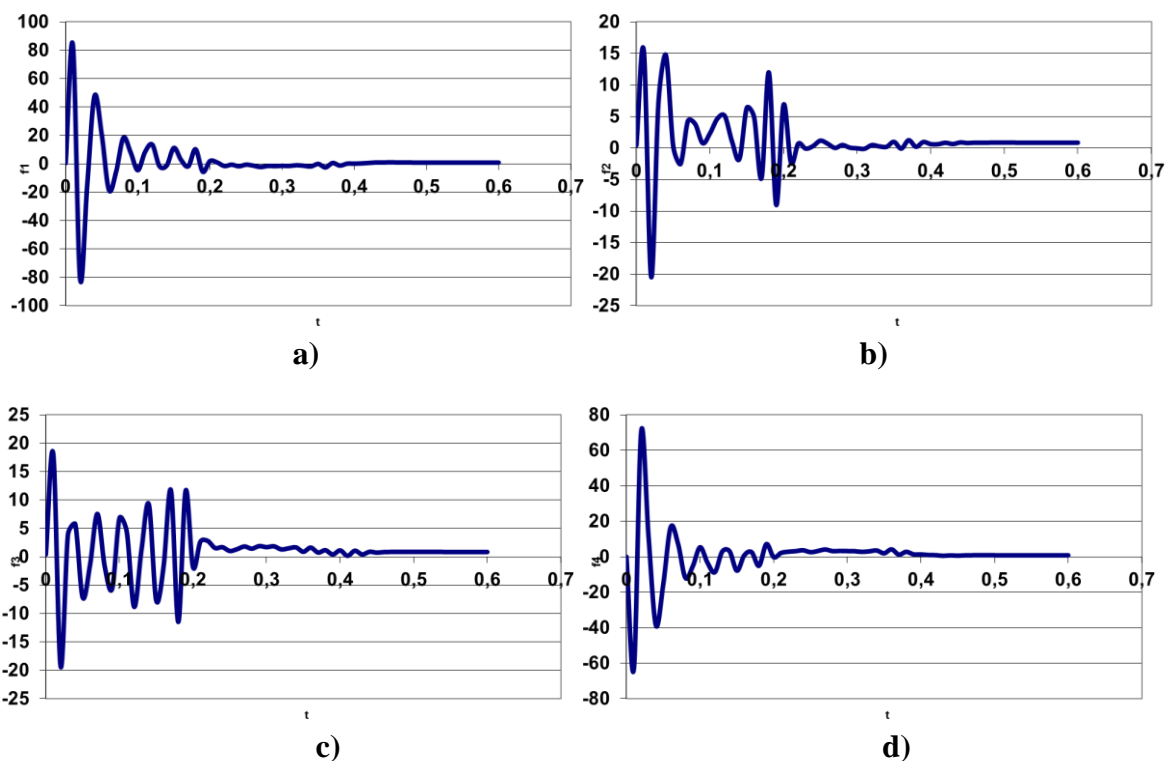
$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$	$(f_0^1(0), f_0^2(0), f_0^3(0))$	$T_{opt}$		
		I задача	III задача	VI задача
(0,252; 0,5; 0,748)	(0,5322; 0,5237; 0,5237)	0,61	<b>0,63</b>	0,65
(0,1; 0,5; 0,9)	(0,2112; 0,8448; 0,8448)	0,89	0,91	0,94
(0,1; 0,2; 0,3)	(0,2112; 0,2112; 0,2112)	0,82	0,83	0,87
(0,1; 0,3; 0,5)	(0,2112; 0,4224; 0,4224)	0,6	0,62	0,64
(0,1; 0,4; 0,7)	(0,2112; 0,6336; 0,6336)	0,7	0,72	0,76
(0,4; 0,5; 0,6)	(0,8448; 0,2112; 0,2112)	0,72	0,74	0,75
(0,1; 0,2; 0,9)	(0,2112; 0,2112; 1,4784)	0,83	0,85	0,86
(0,1; 0,2; 0,8)	(0,2112; 0,2112; 1,2672)	0,71	0,73	0,74
(0,1; 0,2; 0,7)	(0,2112; 0,2112; 1,056)	0,74	0,74	0,77

Далее рассмотрим результаты решения задач оптимального управления колебательными процессами при наличии четырех ПСИ (в табл. 3.5 содержатся результаты решения задач I, III и VI).

Таблица 3.5  
 Минимальное время проведения переходных процессов в задачах I, III и VI при различном расположении четырех ПСИ

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$	$(f_0^1(0), f_0^2(0), f_0^3(0), f_0^4(0))$	$T_{opt}$		
		I задача	III задача	VI задача
(0,2; 0,4; 0,6; 0,8)	(0,4224; 0,4224; 0,4224; 0,4224)	0,51	0,54	0,57
(0,1; 0,2; 0,8; 0,9)	(0,2112; 0,2112; 1,2672; 0,2112)	0,7	0,72	0,76
(0,1; 0,3; 0,7; 0,9)	(0,2112; 0,4224; 0,8448; 0,4224)	0,51	0,53	0,59
(0,1; 0,2; 0,3; 0,4)	(0,2112; 0,2112; 0,2112; 0,2112)	0,72	0,73	0,74

(0,1; 0,2; 0,3; 0,9)	(0,2112; 0,2112; 0,2112; 1,2672)	0,71	0,73	0,77
(0,1; 0,2; 0,3; 0,8)	(0,2112; 0,2112; 0,2112; 1,056)	0,62	0,63	0,66
(0,1; 0,2; 0,3; 0,7)	(0,2112; 0,2112; 0,2112; 0,8448)	0,7	0,72	0,75



**Рис. 3.** Графики оптимальных управляющих воздействий четырех ПСИ для задачи III при следующем расположении ПСИ:  $\bar{x}_1 = 0,2$  (a),  $\bar{x}_2 = 0,4$  (b),  $\bar{x}_3 = 0,6$  (c),  $\bar{x}_4 = 0,8$  (d).

Как видно из анализа таблиц 3.2– 3.5, минимальное время установления переходных процессов с увеличением количества промежуточных сосредоточенных источников уменьшается, а в пределе, при  $n \rightarrow \infty$ , по-видимому, стремится к нулю ( $T_{opt} \rightarrow 0$ ), что совпадает с теоретическими результатами, полученными А.Г. Бутковским в [5, с.125] для распределенного управления колебательной системой. Помимо этого, при симметричном расположении ПСИ относительно концов отрезка  $[0,1]$  оптимальное время установления колебаний одинаково (например, как видно из таблицы 3.3, при расположении ПСИ в точках  $(0,3;0,4)$  и  $(0,6;0,7)$  время установления совпадает и равно 0,68).

Для изучения влияния коэффициента сопротивления среды  $\alpha$  на время установления колебательного процесса были решены задачи оптимального управления колебательными процессами I, II и III, V, в которых совпадают все параметры процессов, кроме значений коэффициента  $\alpha$ . При сравнении результатов решения задач оптимального управления I, II (в первом коэффициент диссипации  $\alpha=2,112$ , во втором  $\alpha=3,168$ ), а также III и V (в первом  $\alpha=2,112$ , во втором  $\alpha=1,408$ ) было выявлено, что время установления процессов практически совпадает. Это позволяет сделать вывод, что оптимальное время установления колебательных процессов не зависит от коэффициента сопротивления среды (диссипации).

Кроме того, из анализа таблиц 3.2, 3.3, 3.4 можно заключить, что оптимальное время установления колебательных процессов также не зависит от параметров начального и конечного стационарных режимов  $\varphi_{10}$  и  $\varphi_{1T}$ , т.е. от величины  $\Delta\xi = |\varphi_{1T} - \varphi_{10}|$  (как

указывалось выше, в рассматриваемых модельных задачах значения функции  $\xi$  при установившихся режимах принималось постоянным). Так, например, при сравнении оптимального времени установления  $T_{opt}$  переходных процессов  $I$  ( $\varphi_{10}=1, \varphi_{1T}=1,5$ ),  $III$  ( $\varphi_{10}=1, \varphi_{1T}=2$ ) и  $VI$  ( $\varphi_{10}=1, \varphi_{1T}=4$ ) (табл. 3.3, 3.4) очевидно, что они отличаются не существенно.

**6. Заключение.** Была исследована зависимость оптимального времени установления колебательных процессов от количества и мест расположения промежуточных сосредоточенных источников, от коэффициента сопротивления среды (диссипации), от разности между значениями параметров начальных и конечных установившихся режимов и т.д. Полученные результаты могут быть применены при решении задач краевого и промежуточного точечного управления колебательными процессами механических, электрических, акустических и гидродинамических систем.

### Литература

1. Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. уравнения. 2000. - Т. 36, № 11.- 1513-1528 с.
2. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимальное граничное управление на одном конце при свободном втором конце и отвечающее ему распределение полной энергии струны // Докл. РАН. 2005. -Т.400, №5.- 585-591 с.
3. Бутковский А.Т. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975, 568 с.
4. Лионс Ж.-Л, Некоторые вопросы оптимального управления распределенными системами //УМН. 1985. Т. 40. Вып. 4. 55-68 с.
5. Кулиев Г.Ф. Задача точечного управления для гиперболического уравнения // Автоматика и телемеханика, 1993, № 3, 80-84 с.
6. Васильев. Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002, 824 с.
7. Айда-заде К.Р., Асадова Д.А. Исследование переходных процессов в нефтепроводах // Автоматика и телемеханика, 2011, № 12, 156-172 с.
8. Айда-заде К.Р., Асадова Д.А. Оптимальное управление переходными процессами в трубопроводах. Palmarium Academic Publishing 2014, 139 с.

UOT 519.622.2

**К.Р. Айда-заде, С.Ә. Әсədova**

**Sərhəd və aralıq toplanmış idarəedicilə təsirlərlə rəqs proseslərinin idarə edilməsində ən tez təsir məsələsinin ədədi həlli**

*Sərhəd və aralıq toplanmış idarəedicilə təsirlərlə rəqs proseslərinin idarə edilməsində ən tez təsir məsələsinin ədədi həlli üçün yanaşma təklif olunmuşdur. Hissə-hissə kəsilməz idarəedicilə sinifdən olan, idarəedicilə təsirlə görə məqsəd funksionalının qradiyenti üçün uyğun analitik düsturlar alınmışdır. Model məsələlər üzərində ədədi eksperimentlər aparılmış, rəqs proseslərinin qərarlaşmasının minimal zamanının toplanmış idarəedicilə təsirlərin yerlərindən, sayından, prosesin parametrlərindən, mühitin müqavimət əmsalı və başqa faktorlardan asılılığı göstərilmişdir.*

**Аçar сөзлөр:** sərhəd və aralıq toplanmış idarəedicilə təsirlər, nöqtəvi mənbə, məqsəd funksionalının qradiyenti, rəqs prosesinin qərarlaşmasının minimal zamanı

**K.R. Aida-zade, J.A. Asadova**

**Numerical investigation of the time-optimal problem when controlling oscillation processes with boundary and intermediate lumped control actions**

*We propose a numerical approach to the investigation of optimal control problems for oscillation processes with boundary and intermediate lumped control actions. We have obtained the corresponding analytical formulas for the components of the gradient of the objective functional with respect to the control actions on the classes of piecewise continuous functions. We give the results of numerical experiments by way of example of solution to several model optimal control problems for oscillation processes with boundary and intermediate lumped control actions. These test problems illustrate the dependence of the minimal transition time of oscillation processes on the number and location of the lumped control actions, as well as on the process parameters, on the drag factor, etc.*

**Keywords:** boundary and intermediate lumped control actions, point source, gradient of the objective functional, minimal transition time of oscillation process