Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXVI, No.3, 2016
www.icp.az/2016/3-02.pdf

УДК 517.977

Э.А. ГАРАЕВА, К.Б. МАНСИМОВ

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ ТИПА КРОТОВА В ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается одна дискретная задача оптимального управления. Установлено достаточное условие оптимальности типа Кротова.

Ключевые слова: дискретная задача управления, достаточное условие оптимальности, формализм Беллмана-Кротова

1. Введение. В работах [1, 2] для одного класса дискретных задач оптимального управления установлен ряд необходимых условий оптимальности первого порядка (аналог дискретного условия максимума, линеаризованного условия максимума, аналог уравнения Эйлера) и в некоторых случаях исследованы особые случаи.

В предлагаемой работе для задачи из [1, 2] установлено достаточное условие оптимальности типа условий Кротова, используя при этом формализм Кротова-Беллмана [3, 4].

2. Постановка задачи. Пусть требуется минимизировать функционал

$$S(u,v)=\varphi_1\big(y(x_1)\big)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\varphi_2\big(x,z(t_1,x)\big). \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$z(t+1,x)=f\big(t,x,z(t,x),u(t)\big),\ \ t=t_0,t_0+1,\dots,t_1-1,$$
$$x=x_0,x_0+1,\dots,x_1, \tag{2.2}$$
$$z(t_0,x)=y(x),\qquad x=x_0,x_0+1,\dots,x_1, \tag{2.3}$$
$$y(x+1)=g\big(x,y(x),v(x)\big),\qquad x=x_0,x_0+1,\dots,x_1, \tag{2.4}$$
$$y(x_0)=y_0, \tag{2.5}$$
$$\begin{gathered} u(t)\in U\subset R^r,\quad t=t_0,t_0+1,\dots,t_1-1,\\ v(x)\in V\subset R^q,\quad x=x_0,x_0+1,\dots,x_1-1, \end{gathered} \tag{2.6}$$
$$\begin{gathered} z(t,x)\in Z,\quad t=t_0,t_0+1,\dots,t_1-1,\quad x=x_0,x_0+1,\dots,x_1-1,\\ y(x)\in Y,\quad x=x_0,x_0+1,\dots,x_1-1. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Здесь $f(t,x,z,u)$ $\big(g(x,y,v)\big)$ – заданная $n(m)$-мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных, $t_0,\ t_1,\ x_0,\ x_1,\ y_0$ – заданы, причем разности $t_1-t_0,\ x_1-x_0$ – есть натуральные числа, $\varphi_1(y),\ \varphi_2(x,z)$ – заданные непрерывные по совокупности переменных скалярные функции, $u(t)$ $\big(v(x)\big)$ – дискретный $r(q)$-мерный вектор управляющих воздействий, $U,\ V,\ Z,\ Y$ – заданные непустые и ограниченные множества.

Набор $\big(u(t),v(x),z(t,x),y(x)\big)$ назовем допустимым процессом, если он удовлетворяет соотношениям (2.1)-(2.7).

Множество всех допустимых наборов обозначим через W. Допустимый набор, доставляющий минимум функционалу (2.1) при ограничениях (2.2)-(2.7), назовем оптимальным управлением.

Нашей целью является, используя формализм Кротова-Беллмана, доказать достаточное условие оптимальности.

Пусть $K_1(x,z),\ K_2(x,z)$ – некоторые скалярные функции непрерывно дифференцируемые по $z,\ y$ соответственно, при всех $t,\ x$ соответственно.

3. Основной результат. Введем функции $R_1(t,x,z,u)$, $R_2(x,y,v)$ и функционалы $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(y)$ следующим образом

$$R_1(t,x,z,u) = K_1\big(t+1,x,f(t,x,z,u)\big) - K_1(t,x,z), \tag{3.1}$$

$$R_2(x,y,v) = K_2\big(x+1,g(x,y,v)\big) - K_2(x,y) + K_1(t_0,x,y), \tag{3.2}$$

$$\Phi_1(z) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \varphi_2\big(x,z(t_1,x)\big) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1(t_1,x,z), \tag{3.3}$$

$$\Phi_2(y) = \varphi_1(y) + K_2(x,y). \tag{3.4}$$

Через $\big(u^o(t),v^o(x),z^o(t,x),y^o(x)\big)$ обозначим фиксированный допустимый процесс.

Определение 3.1. Если для допустимого процесса $\big(u^o(t),v^o(x),z^o(t,x),y^o(x)\big)$ существует функция Кротова (K_1,K_2) такая, что для произвольного допустимого процесса $\big(u(t),v(x),z(t,x),y(x)\big)$

$$R_1(t,x,z^o,u^o) \ge R_1(t,x,z,u), \tag{3.5}$$

$$R_2(x,y^o,v^o) \ge R_2(x,y,v), \tag{3.6}$$

то будем говорить, что допустимый процесс $\big(u^o(t),v^o(x),z^o(t,x),y^o(x)\big)$ удовлетворяет расширенному условию максимума [5, с.65].

Сформулируем и докажем достаточное условие оптимальности.

Теорема 3.1. Если допустимый процесс $\big(u^o(t),v^o(x),z^o(t,x),y^o(x)\big)$ удовлетворяет расширенному условию максимума и минимизирует функционалы (3.3), (3.4), то этот допустимый процесс является решением задачи (2.1), (2.7).

Доказательство. Через $\big(u(t),v(x),z(t,x),y(x)\big)$ обозначим произвольный допустимый процесс. Тогда по условию теоремы должны выполняться соотношения

$$R_1(t,x,z^o,u^o) \ge R_1(t,x,z,u), \tag{3.7}$$

$$R_2(x,y^o,v^o) \ge R_2(x,y,v), \tag{3.8}$$

$$-G\big(y^o(x_1)\big) - K_2\big(x,y^o(x_1)\big) \ge -G\big(y(x_1)\big) - K_2\big(x,y(x_1)\big) \tag{3.9}$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \varphi_2\big(x,z^o(t_1,x)\big) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1\big(t_1,x,z^o(t_1,x)\big) \ge -\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \varphi_2\big(x,z(t_1,x)\big) - \\ -\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1\big(t_1,x,z(t_1,x)\big), \tag{3.10}$$

Из неравенств (3.7), (3.8), учитывая (3.1), (3.2) получим

$$\sum_{t=t_0}^{t-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1\big(t+1,x,z^o(t+1,x)\big) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1\big(t_1,x,z^o(t,x)\big) \ge \\ \ge \sum_{t=t_0}^{t-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1\big(t+1,x,z(t+1,x)\big) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1\big(t,x,z(t,x)\big)\,. \tag{3.11}$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_2\Big(x+1,g\big(x,y^o(x),v^o(x)\big)\Big) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_2\big(x,y^o(x)\big) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1\big(t_0,x,y^o(x)\big) \ge \\ \ge \sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_2\Big(x+1,g\big(x,y(x),v^o(x)\big)\Big) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_2\big(x,y(x)\big) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1\big(t_0,x,y(x)\big). \tag{3.12}$$

Легко доказать, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1\big(t+1,x,z^o(t+1,x)\big)=\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1\big(t_1,x,z^o(t_1,x)\big)-$$
$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1\big(t_0,x,z^o(t_0,x)\big)+\sum_{t=t_0}^{t-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1\big(t_1,x,z^o(t,x)\big)\,, \tag{3.13}$$
$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_2\big(x+1,y^o(x+1)\big)=K_2\big(x,y^o(x)\big)-K_2\big(x,y^o(x_0)\big)+$$
$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_2\big(x,y^o(x)\big). \tag{3.14}$$

Суммируя неравенства (3.9)-(3.12) и учитывая тождества (3.13), (3.14), будем иметь

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1\big(t_1,x,z^o(t_1,x)\big)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1\big(t_0,x,z^o(t_0,x)\big)+\sum_{t=t_0}^{t-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1\big(t_1,x,z^o(t,x)\big)-$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1\big(t,x,z^o(t,x)\big)+K_2\big(x_1,y^o(x_1)\big)-K_1\big(x_0,y^o(x_0)\big)+$$
$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_2\big(x,y^o(x)\big)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1\big(t_0,x,y^o(x)\big)-\varphi_1\big(y^o(x_1)\big)-K_2\big(x_1,y^o(x_1)\big)-$$
$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \varphi_2\big(x,z^o(t_1,x)\big)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1\big(t,x,z^o(t_1,x_1)\big)\geq\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1\big(t_1,x,z^o(t_1,x_1)\big)-$$
$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1\big(t_0,x,z^o(t_0,x)\big)+\sum_{t=t_0}^{t-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1\big(t,x,z(t,x)\big)-\sum_{t=t_0}^{t-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1\big(t,x,z(t,x)\big)+$$
$$+K_2\big(x_1,y(x_1)\big)-K_2\big(x_0,y(x_0)\big)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_2\big(x,y(x)\big)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_2\big(x,y(x)\big)+$$
$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1\big(t_0,x,y(x)\big)-\varphi_1\big(y^o(x_1)\big)-K_2\big(x_1,y(x_1)\big)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \varphi_2\big(x,z^o(t_1,x)\big)-$$
$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1} K_1\big(t_1,x,z^o(t_1,x)\big)\,.$$

Группируя подобные члены, будем иметь

$$K_2\big(x_0,y^o(x_0)\big)-\varphi_1\big(y^o(x_1)\big)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \varphi_2\big(x,z^o(t_1,x)\big)\geq K_2\big(x_0,y(x_0)\big)-$$
$$-\varphi_1\big(y(x_1)\big)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \varphi_2\big(x,z(t_1,x)\big). \tag{3.15}$$

Из (3.15), в силу того, что $y(x_0)=y^o(x)$ имеем

$$S(u^o,v^o)=S(u,v)$$

Отсюда, в силу произвольности допустимого процесса $\big(u(t), v(x), z(t,x), y(x)\big)$, приходим к доказательству теоремы.

Теперь предположим, что множества $Z,\ Y$ открыты, а множества

$$f(t,x,z^o(t,x),U) = \{\alpha:\ f(t,x,z(t,x),u), u \in U\},$$
$$g(x,y^o(x),V) = \{\beta:\ f(t,x,y^o(x),v), v \in V\} \tag{3.16}$$

выпуклы.

Из соотношений (3.7), (3.8) в силу открытости множеств $Z,\ Y$ следует, что вдоль оптимального процесса $\big(u^o(t), v^o(x), z^o(t,x), y^o(x)\big)$

$$\frac{\partial R_1(t,x,z^o,u^o)}{\partial z} = 0, \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial R_2(x,y^o,v^o)}{\partial y} = 0. \tag{3.18}$$

$$R_1(t,x,z^o,u^o) \geq R_1(t,x,z,u), \tag{3.19}$$

$$R_2(x,y^o,v^o) \geq R_2(x,y,v), \tag{3.20}$$

Из (3.71), (3.18) с учетом (3.1), (3.2) имеем

$$\frac{\partial K_1\big(t+1,x,z^o(t+1,x)\big)}{\partial z(t+1,x)} \frac{f\big(t,x,z^o(t,x),u^o(t)\big)}{\partial z(t,x)} - \frac{\partial K_1\big(t,x,z^o(t,x)\big)}{\partial z(t,x)} = 0, \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial K_1'\big(x+1,y^o(x+1)\big)}{\partial y(x+1)} \frac{g\big(x,y^o(x),v^o(x)\big)}{\partial y(x)} - \frac{\partial K_2\big(x,y^o(x)\big)}{\partial y(x)} +$$
$$+ \frac{\partial K_1\big(t_0,x,y^o(x)\big)}{\partial y(x)} = 0. \tag{3.22}$$

Далее из уравнений Эйлера для функционалов (3.3), (3.4) имеем

$$\frac{\partial K_1\big(t_1,x,z^o(t_1,x)\big)}{\partial z(t_1,x)} = -\frac{\partial \varphi_2\big(x,z^o(t_1,x)\big)}{\partial z(t_1,x)}, \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial K_2\big(x,y^o(x_1)\big)}{\partial y(x_1)} = -\frac{\partial \varphi_1\big(y^o(x_1)\big)}{\partial y(x_1)}. \tag{3.24}$$

Введем обозначения

$$\psi^o(t,x) = \frac{\partial K_1\big(t,x,z^o(t+1,x)\big)}{\partial z(t+1,x)},$$
$$p^o(x) = \frac{\partial K_2\big(x,y^o(x+1)\big)}{\partial y(x+1)}. \tag{3.25}$$

Тогда из (3.21), (3.22) соответственно следует, что

$$\psi^o(t-1,x) = \psi^{o'}(t,x)\ \frac{\partial f\big(t,x,z^o(t,x),u^o(t)\big)}{\partial z}, \tag{3.26}$$

$$\psi^o(t_1-1,x) = -\frac{\partial \varphi_2\big(x,z^o(t_1,x)\big)}{\partial z(t_1,x)}. \tag{3.27}$$

$$p^o(x-1) = \frac{\partial g\big(x,y^o(t,x),v^o(t)\big)}{\partial y} p^o(x), \tag{3.28}$$

$$p^o(x_1-1) = -\frac{\partial \varphi_1\big(y^o(x_1)\big)}{\partial y} p^o(x). \tag{3.29}$$

Полагая

$$H\big(t,x,z,u,\psi^o(t,x)\big) = \psi^{o\prime}(t,x)\, f(t,x,z,u),$$
$$M\big(x,y,v,p^o(x)\big) = p^{o'}(x)\ g(x,y,v)$$

и учитывая выпуклость множеств (3.16) из (3.19)-(3.20) по схеме, например из [6, с.36] получаем, что

$$\max_{u\in U} H\big(t,x,z^o(t,x),u,\psi^o(t,x)\big) = H\big(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\big),$$

$$\max_{v\in V} M\big(x,y^o(x),v,p^o(x)\big) = M\big(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x)\big).$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 3.2. При сделанных предположениях для оптимальности допустимого управления $\big(u^o(t),v^o(x)\big)$ в задаче (2.1)-(2.7) необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$\max_{u\in U} H\big(t,x,z^o(t,x),u,\psi^o(t,x)\big) = H\big(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\big),$$

$$t=t_0,\dots,t_1-1,\quad x=x_0,x_0+1,\dots,x_1-1,$$

$$\max_{v\in V} M\big(x,y^o(x),v,p^o(x)\big) = M\big(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x)\big),\ \ x=x_0,x_0+1,\dots,x_1-1.$$

4. Выводы. Используя формализм Беллмана-Кротова доказано достаточное условие оптимальности в одной дискретной задаче управления, представляющей собой дискретный аналог задачи А.М.Москаленко из [7, с.68-69].

Литература

1. Мансимов К.Б., Гараева Е.А. Об одной дискретной задаче оптимального управления // Вестник БГУ. Сер. физ.-мат. наук. 2014, № 1, с. 40-49.
2. Мансимов К.Б., Гараева Е.А. Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков для одного класса дискретных задач оптимального управления // Изв. НАН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и матем. наук. 2015, № 3, с. 92-98.
3. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Задачи и методы оптимального управления. М. Наука, 1973, 381 с.
4. Кротов В.Ф., Логоша Б.А., Лобанов С.М. и др. Основы теории оптимального управления. М. Высшая школа. 1990, 430 с.
5. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М. Наука, 1965, 576 с.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Основы динамического программирования. Минск. Изд-во БГУ, 1975, 262 с.
7. Москаленко А.И. Об одной задаче оптимального регулирования // Журн. Вычис. мат. и мат. физики. 1989, № 1, с. 68-78.

UOT 517.977

E.A Qarayeva, K.B. Mənsimov

Bir diskret idarəetmə məsələsində optimallıq üçün Krotov tipli kafi şərt

Məqalədə bir diskret optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün Bellman-Krotov formalizmini tətbiq edərək optimallıq üçün kafi şərt alınmışdır.

Açar sözlər: diskret idarə məsələsi, optimallıq üçün kafi şərt, Bellman-Krotov formalizmi

E.A. Garayeva, K.B. Mansimov

Sufficient optimality condition of the Krotov type for one discrete control problem

The paper considers one discrete control problem. Bellman-Krotov type formalism sufficient optimality condition is obtained.

Keywords: discrete control problem, sufficient optimality condition, Bellman-Krotovs formalism

Институт Систем Управления НАН Азербайджана
Бакинский Государственный Университет
Представлено 21.12.2015