Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXVI, No.3, 2016
www.icp.az/2016/3-03.pdf

УДК 519.622.2

В.М. АБДУЛЛАЕВ, С.Г. ТАЛЫБОВ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается численное решение задачи определения функций реакции на места нагружения относительно объектов, описываемых системами нагруженных дифференциальных уравнений с обыкновенными производными. Для решения задачи с применением численных методов оптимизации первого порядка получены аналитические формулы градиента функционала по идентифицируемым параметрам нагружения. Предлагаемый подход может быть применен и для определения параметров нагружения в распределенных системах, описываемых дифференциальными уравнениями с частными производными, которые с использованием метода прямых приводятся к рассматриваемой задаче.

Ключевые слова: нагруженное дифференциальное уравнение, место нагружения, реакция на нагружение, оптимальное управление, нелокальные условия, обратная задач, интегральные условия

1. Введение. Состояния многих объектов, процессов описываются нагруженными дифференциальными уравнениями с обыкновенными или частными производными [1-4], при этом точки нагружения, точнее, состояния в этих точках, влияют на состояние всего объекта, процесса. Поэтому проектирование таких объектов, а именно выбор оптимальных точек нагружения и соответствующих функций реакции на эти нагружения имеют важное значение на функционирование всего объекта в целом.

Представляют интерес и обратные задачи, связанные с нагруженными дифференциальным уравнениями [5, 6]. В этих задачах требуется по имеющейся какой-либо информации о наблюдениях за состоянием процесса восстановить (определить) функции реакции на нагружения. В качестве результатов наблюдений может выступать информация в виде различных условий на состояние: точечные, интегральные, неразделенные точечные и другие нелокальные условия. Выбор функций реакции на нагружения из условия минимизации функционала среднеквадратичного отклонения от наблюденных (а при проектировании - желаемых) значений состояния формально приводит к такой же постановке задачи параметрического оптимального управления, как и задачи оптимального проектирования нагруженных систем.

В данной статье приводится численное решение задачи определения функций реакции на нагружения, основанное на численных методах оптимизации первого порядка. С этой целью получены формулы для компонент градиента функционала по функциям реакции.

2. Постановка задачи. Пусть состояние динамического объекта (процесса) описывается системой n-линейных неавтономных нагруженных дифференциальных уравнений [4]:

$$\frac{du(x)}{dx} = A(x)u(x) + \sum_{s=1}^{l} B^s(x)u(\bar{x}_s) + C(x), \quad x \in [x_0, x_f], \tag{2.1}$$

которую запишем и в следующем виде, который нам понадобится в дальнейшем:

$$\frac{du_i(x)}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)u_j(x) + \sum_{s=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^s(x)u_j(\bar{x}_s) + C_i(x), \quad i = 1,2,\dots,n, x \in [x_0, x_f].$$

Здесь $u(x) \in R^n$ – состояние объекта в точке x из заданного отрезка $[x_0, x_f]$; $A(x) = ((a_{ij}(x))), B^s = B^s(x) = ((b_{ij}^s)),\ i = 1,2,\dots,n, j = 1,2,\dots,n, s = 1,2,\dots,l$ $-n$-мерные квадратные матрицы, состоящие из непрерывных функций; $C(x)$ – непрерывная n-мерная вектор-функция; $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_l)^T$ - места нагружения из отрезка $[x_0, x_f]$, $B = B(x) = (B^1(x), B^2(x), \ldots, B^l(x))$ – соответствующие функции реакции точек объекта на нагружения.

Имеются результаты наблюдений в виде n-условий, которые могут быть заданы в одном из концов отрезка $[x_0, x_f]$, например, слева:

$$u(x_0) = \gamma \in R^n, \tag{2.2}$$

или в виде неразделенных точечных условий:

$$\sum_{i=1}^{l_1} \beta_i u(\hat{x}_i) = \gamma, \tag{2.3}$$

или, в более общем случае, в виде неразделенных точечных и интегральных условий

$$\sum_{i=1}^{l_1} \beta_{1i} u(\hat{x}_i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\breve{x}_j}^{\hat{x}_j} \beta_{2j}(\tau) u(\xi) d\xi = \gamma. \tag{2.4}$$

Здесь $\beta_i, \beta_{1i}, \beta_{2j}(\cdot)$ – квадратные матрицы размера n; точки объекта $\hat{x}_i, \breve{x}_j, \hat{x}_j$ из отрезка $[x_0, x_f]$ – заданы, причем $\breve{x}_j, \hat{x}_j, \hat{x}_i \notin [\breve{x}_j, \hat{x}_j]$, $i = 1,2, \ldots, l_1$, $j = 1,2, \ldots, l_2$.

Задача заключается в определении незаданных непрерывных функций реакции на нагружения $b_{ij}^s(x)$, $i, j = 1,2, \ldots, n$, $s = 1,2, \ldots, l$, минимизирующих заданный функционал:

$$J(B) = \alpha_1 \int_{x_0}^{x_f} f^0\big(u(x), B(x)\big)\, dx + \alpha_2 \Phi_1\big(u(\tilde{x})\big). \tag{2.5}$$

Здесь и далее будут использованы следующие обозначения:

$$\Phi_1(u(\tilde{x})) = \Phi_1(\tilde{u}) = \Phi_1(u_1(\tilde{x}_1), u_1(\tilde{x}_2), \ldots, u_1(\tilde{x}_{l_3}), u_2(\tilde{x}_1), \ldots, u_n(\tilde{x}_{l_3})) == \Phi_1(\tilde{u}_{11}, \tilde{u}_{12} \ldots, \tilde{u}_{nl_3}).$$

На оптимизируемые функции $b_{ij}^s(x)$ могут быть наложены какие-либо условия, в частности, на возможные их значения:

$$\underline{b}_{ij}^s(x) \le b_{ij}^s(x) \le \bar{b}_{ij}^s(x), \ \ i, j = 1,2, \ldots, n, s = 1,2, \ldots, l, x \in [x_0, x_f]. \tag{2.6}$$

Здесь $\underline{b}_{ij}^s(x)$, $\bar{b}_{ij}^s(x)$ – заданные функции, $s = 1,2, \ldots, l$; $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_{l_3})$, $u(\tilde{x}) = (u(\tilde{x}_1), u(\tilde{x}_2), \ldots, u(\tilde{x}_{l_3}))$; $u(\bar{x}) = (u(\bar{x}_1), u(\bar{x}_2), \ldots, u(\bar{x}_l))$; $\alpha_i \ge 0$, $i = 1,2$ – весовые коэффициенты, l, l_1, l_2 – заданы.

Предположим, что при заданных допустимых функциях нагружения $B(x)$ рассматриваемые начальная задача (2.1), (2.2) или дифференциальные уравнения (2.1) с одним из нелокальных условий (2.3), (2.4) имеют непрерывно-дифференцируемое на $[x_0, x_f]$ решение, причем единственное. Отметим, что, если для задачи (2.1), (2.2) известные условия существования, единственности решения имеют конструктивный характер [4], подобных условий для задач (2.1), (2.3) и (2.1), (2.4) нет. В работе [7] получены оценки решений систем нагруженных интегро-дифференциальных уравнений с многоточечными и интегральными условиями. На практике вопрос существования решения для этих задач выясняется в процессе непосредственного решения каким-либо численным методом [8-10].

Возможно, что в задаче (2.1)-(2.6) определяемыми являются не все функции $b_{ij}^s, i,j = 1,2,\ldots,n, s = 1,2,\ldots,l$, а только некоторые из них. Рассмотрение такой задачи не существенно отличается от рассматриваемой случае, в этом случае потребовалось бы введение в постановке задачи новых дополнительных обозначений множеств и индексов для определяемых точек нагружения и функций реакций, что усложнило бы наглядность выкладок получаемых формул.

Рассматриваемые задачи (2.1), (2.5)-(2.6) с одним из условий из (2.2)-(2.4) могут возникать при оптимальном проектировании (синтезе) стационарных систем с нагружением [11]. Такую же формулировку имеют и обратные задачи, возникающие при математическом моделировании нагруженных систем (процессов), встречающие в частности, в подземной гидрогазодинамике и др. [1, 2, 12].

3. Метод решения. Рассматриваемую задачу (2.1), (2.5)-(2.6) с одним из условий (2.2)-(2.4) независимо от источника ее возникновения можно отнести к задаче управления нагруженными системами [13].

Отметим, что при заданных допустимых значениях, оптимизируемых $B(x)$ для решения систем дифференциальных уравнений (2.1), при любом из условий (2.2)-(2.4) имеются численные методы, основанные, например, на приведении исходной задачи к решению вспомогательных задач Коши [4, 14].

Для решения рассматриваемой обратной задачи предлагается использовать итерационные методы численной оптимизации первого порядка, основанные на методах проекции, в частности, градиента

$$\big(B(x)\big)^{\mu+1} = P_{(2.6)}\Big(\big(B(x)\big)^{\mu} - \sigma_\nu\, grad_B J(B^{\mu})\Big),\ \ \mu = 0,1,\ldots \tag{3.1}$$

где $\sigma_\mu > 0$ – шаг в направлении антиградиента функционала, обеспечивающий выполнение условия монотонности итерационного процесса:

$$J(B^{\mu+1}) \le J(B),$$

который может выбираться различными способами [15, 16]; $P_{(2.6)}(\cdot,\cdot)$ – оператор проектирования произвольной $(n \times l)$-мерной матричной функции на множество, заданное ограничениями (2.6). Произвольная начальная матричная функция $B^0(x)$ должна удовлетворять лишь условиями (2.6).

Получим формулы для компонент градиента функционала $\partial J(B)/\partial b_{ij}^s$ в задаче (2.1), (2.2), (2.5), (2.6). Пусть непрерывно-дифференцируемая функция $u(x)$ есть решение задачи (2.1), (2.2) при допустимых значениях оптимизируемых параметров $B(x)$, а непрерывно-дифференцируемая функция $\bar{u}\ (x)$ – решение задачи (2.1), (2.2) при параметрах, получивших приращения, т.е. при $\bar{B}$. Обозначим через $\Delta u(x) = \bar{u}(x) - u(x)$ приращение решения задачи (2.1),(2.2), для которого очевидно выполняется условие:

$$\Delta u(x_0) = 0. \tag{3.2}$$

Ясно, что $\Delta u(x)$ должна удовлетворять следующей системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\Delta u_i(x)}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,(x)\Delta u_j(x) + \sum_{s=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}(b_{ij}^s(x) + \Delta b_{ij}^s(x))\Delta u_j(\bar{x}_s) +$$

$$+\sum_{s=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} u_j(\bar{x}_s)\Delta b_{ij}^{s}(x), \quad i=1,2,\dots,n, \quad x\in[x_0,x_f], \tag{3.3}$$

с начальными условиями (3.2).

Справедлива оценка:

$$\|\Delta u(x)\|_{L_2^n[x_0,x_f]} \le M_1\left(\|\Delta B(x)\|_{L_2^{nl}[x_0,x_f]}\right), \tag{3.4}$$

где M_1 – постоянная величина, не зависящая от $B(x)$.

Известно, что компоненты градиента функционала определяются главными линейными частями приращения функционала при приращении $\Delta B(x)$. Линеаризуя приращение функционала (2.5), будем иметь:

$$\Delta J(B) = J(\tilde{B}) - J(B\,) =$$

$$=\alpha_1\int_{x_0}^{x_f}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f^0(u(x),B(x))}{\partial u_j}\Delta u_j(x)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{l}\frac{\partial f^0(u(x),B(x))}{\partial b_{ij}^{s}}\Delta b_{ij}^{s}(x)\right]dx+$$

$$+\alpha_2\sum_{j=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{l_3}\frac{\partial\Phi_1(\tilde{u})}{\partial\bar{u}_{j\nu}}\Delta u_j(\tilde{x}_\nu)+o(\|\Delta u(x)\|)+o(\|\Delta B(x)\|)+o(\|\Delta\tilde{u}\|). \tag{3.5}$$

Перенесем правые части всех уравнений системы (3.3) влево, умножим обе части полученной системы на пока произвольную всюду непрерывную, непрерывно дифференцируемую, кроме точек $\tilde{x}_i$, $i=1,2,\dots,l_3$, n-мерную вектор-функцию $\psi(x)$ и просуммируем все уравнения системы. Интегрируя полученную сумму на отрезке $[x_0,x_f]$, разбив его на отрезки $[\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i)$, $i=1,2,\dots,l_3$, считая $\tilde{x}_0=x_0$, $\tilde{x}_{l_3+1}=x_f$ и используя интегрирование по частям, после некоторые преобразований и объединения интегралов по отрезкам будем иметь:

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{x_0}^{x_f}\left[-\frac{d\psi_i(x)}{dx}-\sum_{j=1}^{n}a_{ji}(x)\,\psi_j(x)-\sum_{s=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}\delta(x-\bar{x}_s)\int_{x_0}^{x_f}b_{ji}^{s}(\xi)\psi_j(\xi)d\xi\right]\Delta u_i(x)dx+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{l_3}\sum_{i=1}^{n}[\psi_i^-(\tilde{x}_\nu)-\psi_i^+(\tilde{x}_\nu)]\,\Delta u_i(\tilde{x}_\nu)+\sum_{i=1}^{n}\psi_i(b)\Delta u_i(b)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{l}\int_{x_0}^{x_f}\left[\psi_i(x)u_j(\bar{x}_s)\Delta b_{ij}^{s}(x)\right]dx+o(\|\Delta u(x)\|)=0. \tag{3.6}$$

К правой части (3.5) прибавим (3.6), после группировки соответствующих членов получим:

$$\Delta J(B)=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_0}^{x_f}\left[-\frac{d\psi_i(x)}{dx}-\sum_{j=1}^{n}a_{ji}(x)\,\psi_j(x)-\sum_{s=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}\delta(x-\bar{x}_s)\int_{x_0}^{x_f}b_{ji}^{s}(\xi)\psi_j(\xi)d\xi+\right.$$

$$\left.+\alpha_1\frac{\partial f^0(u(x),B(x))}{\partial u_i}\right]\Delta u_i(x)dx+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{l_3}\sum_{i=1}^{n}\left[\psi_i^-(\tilde{x}_\nu)-\psi_i^+(\tilde{x}_\nu)+\alpha_3\frac{\partial\Phi_1(\tilde{u})}{\partial\bar{u}_{i\nu}}\right]\Delta u_i(\tilde{x}_\nu)+\sum_{i=1}^{n}\psi_i(b)\Delta u_i(b)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{l}\int_{x_0}^{x_f}\left[-\psi_i(x)u_j(\bar{x}_s)+\alpha_1\frac{\partial f^0(u(x),B(x))}{\partial b_{ij}^s}\right]\Delta b_{ij}^s(x)dx+$$

$$+o(\|\Delta u(x)\|)+o(\|\Delta B(x)\|)+o(\|\Delta\tilde{u}\|). \qquad (3.7)$$

В (3.7) использованы обозначения:

$$\psi(\xi)=\psi^-(\xi)=\psi(\xi-0), \quad \psi^+(\xi)=\psi(\xi+0)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\psi(\xi+\varepsilon).$$

Учитывая произвольность вектор-функции $\psi(x)$, потребуем от нее, чтобы она была решением следующей задачи, которую назовем сопряженной к задаче (2.1), (2.2), (2.5):

$$\frac{d\psi_i(x)}{dx}=-\sum_{j=1}^{n}a_{ji}(x)\,\psi_j(x)-\sum_{s=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}\delta(x-\bar{x}_s)\int_{x_0}^{x_f}b_{ji}^s(\xi)\psi_j(\xi)d\xi+$$

$$+\alpha_1\frac{\partial f^0(u(x),B(x))}{\partial u_i}, \qquad i=1,2,\dots,n, \qquad (3.8)$$

$$\psi_i(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x=x \text{ и } \tilde{x}_{l_3}<x_f,\\ -\alpha_2\dfrac{\partial\Phi_1(\tilde{u})}{\partial\tilde{u}_{il_3}}, & \text{если } x=\tilde{x}_{l_3}=x_f,\\ \psi_i^+(x)-\alpha_2\dfrac{\partial\Phi_1(\tilde{u})}{\partial\tilde{u}_{i\nu}}, & \text{если } x_0<x=\tilde{x}_\nu<x_f, \nu=1,2,\dots,l_3, i=1,2,\dots,n.\end{cases} \qquad (3.9)$$

Сопряженная задача (3.8)-(3.9) имеет следующие особенности. Во-первых, система (3.8) является интегро-дифференциальной типа Фредгольма, во-вторых, в ее правой части участвует обобщенная δ-функция Дирака, в третьих, из условий (3.8) следует, что сопряженные переменные претерпевают в заданных промежуточных точках нагружения $\tilde{x}_\nu$ скачки первого рода.

Учитывая (3.5), (3.8), (3.9), для компонент вектора градиента целевого функционала задачи (2.1), (2.2), (2.5) будем иметь:

$$J'_{b_{ij}^s(x)}(B)=-\psi_i(x)u_j(\bar{x}_s)+\alpha_1\frac{\partial f^0\big(u(x),B(x)\big)}{\partial b_{ij}^s}, i,j=1,2,\dots,n, s=1,2,\dots,l, \qquad (3.10)$$

Минимизирующая последовательность $\{B(x\}^\mu$, $\mu=0,1,\dots$, для численного решения задачи (2.1), (2.2), (2.5)-(2.6) с использованием полученных формул градиента функционала строится следующим образом. На каждой текущей μ-той итерации сначала решается начальная нагруженная задача (2.1), (2.2) (применяя, например, способ предложенный в [4]). Далее решается сопряженная задача (3.8), (3.9), а по формулам (3.10) определяются значения компонент градиента функционала. Пользуясь какой-либо схемой метода проекции градиента (3.1), учитывая простоту ограничений (2.6), а следовательно простоту оператора проектирования, выбирается шаг σ_ν в направлении спроектированного антиградиента, определяются новые значения $\{B(x)\}^{\mu+1}$ минизирующей последовательности.

В случае, если вместо условий (2.2) имеют место нелокальные условия (2.3) или (2.4), то методика получения компонент градиента функционала остается прежней, но естественно изменятся выкладки. Не останавливаясь подробно на получении формул, с методикой их получения можно ознакомится, например, в работах авторов [13], приведем эти формулы, которые различаются условиями (3.9) для сопряженной системы.

В случае задачи (2.1), (2.3), (2.4) вместо условий (3.9) будет иметь место:

$$\psi(x)=\begin{cases}\alpha_2\dfrac{\partial\Phi_1(\tilde{u})}{\partial\tilde{u}_1}+\beta_1^*\lambda, & \text{если } x=\tilde{x}_1=x_0, \quad \hat{x}_1=x_0,\\ \alpha_2\dfrac{\partial\Phi_1(\tilde{u})}{\partial\tilde{u}_1}, & \text{если } x=\tilde{x}_1=x_0, \quad \hat{x}_1>x_0,\\ \beta_1^*\lambda, & \text{если } x=\tilde{x}_1>x_0, \quad \hat{x}_1=x_0,\\ -\alpha_2\dfrac{\partial\Phi_1(\tilde{u})}{\partial\tilde{u}_{l_3}}-\beta_{l_1}^*\lambda, & \text{если } x=x_{l_3}=x_f, \quad \hat{x}_{l_1}=x_f,\\ -\alpha_2\dfrac{\partial\Phi_1(\tilde{u})}{\partial\tilde{u}_{l_3}}, & \text{если } x=x_{l_3}=x_f, \quad \hat{x}_{l_1}<x_f,\\ -\beta_{l_1}^*\lambda, & \text{если } x=x_{l_3}<x_f, \quad \hat{x}_{l_1}=x_f,\\ \psi^{+*}(x)-\alpha_2\dfrac{\partial\Phi_1(\tilde{u})}{\partial\tilde{u}_\nu}-\beta_\nu^*\lambda, & \text{если } x_0<x=\tilde{x}_\nu,\hat{x}_i<x_f, \nu=1,..,l_3, i=1,..,l_1.\end{cases} \tag{3.11}$$

Здесь $\lambda-n$-мерный вектор множителей Лагранжа, определяемый на каждой итерации (3.1) при заданных $B(x)$ из условий (2.3), (3.11) с применением аналога метода параметрической прогонки относительно сопряженной системы (3.8) [14] .

В случае задачи (2.1), (2.4), (2.5) условия (3.11) сохраняются, а сопряженная система имеет вид:

$$\frac{d\psi(x)}{dx}=-A^*(x)\psi(x)-\sum_{s=1}^{l}\delta(x-\bar{x}_s)\int_{x_0}^{x_f}B^{s*}(\xi)\psi(\xi)d\xi+\alpha_1\frac{\partial f^0(u(x),B(x))}{\partial u}+$$
$$+\sum_{j=1}^{l_2}\chi_{[\hat{x}_j,\breve{x}_j]}(x)\cdot\beta_{2j}^*(x)\lambda\,, \tag{3.12}$$

где

$$\chi_{[\breve{x}_j,\hat{x}_j]}(x)=\begin{cases}1, & x\in[\breve{x}_j,\hat{x}_j],\\ 0, & x\notin[\breve{x}_j,\hat{x}_j],\end{cases}\quad x\in[x_0,x_f].$$

В случае условий (2.3) и (2.4) изменится схема численного решения системы нагруженных дифференциальных уравнений, т.е. в этом случае имеем дело с нелокальными неразделенными точечными (2.3) и интегральными условиями. Здесь можно использовать численную схему, предложенную в работе [14]. Отметим, что решение сопряженных задач (3.8), (3.12) и (3.13), (3.12) также требуют использования специальных схем [14].

Порядок применения процедуры (3.1) как для решения задачи (2.1), (2.3), (2.5)-(2.6), так и задачи (2.1), (2.4)-(2.6) в целом такой же, что и был описан выше для задачи (2.1), (2.2), (2.5)-(2.6).

4. Выводы. В статье предложена схема численного решения задач оптимизации функций реакции на нагружения для стационарных объектов. Исследуемые объекты описываются системами нагруженных линейных дифференциальных уравнений с обыкновенными производными. Рассматриваемые постановки задач могут возникать как при проектировании нагруженных систем, так и при решении обратных задач по идентификации функций реакции на нагружения. Относительно целевого функционала задачи получены аналитические формулы для компонент градиента по оптимизаируемым парам етрами. Это позволяет использовать для решения задачи эффективные численные методы первого порядка.

Отметим, что предлагаемая схема может быть применена и для объектов с распределенными параметрами, описываемых дифференциальными уравнениями с частными производными. Для сведения этих задач к рассматриваемым постановкам можно использовать методы прямых.

Литература

1. Нахушева В.А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. – М.: Наука, 2006, 173 с.
2. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. Москва, Наука, 2012, 232 с.
3. Дженалиев М.Т. Оптимальное управление линейными нагруженными параболическими уравнениями // Дифференц. уравнения. 1989. Т.25. № 4. С. 641 - 652.
4. Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. О численном решении нагруженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. Матем . и матем. физики. 2004. Т.44.№ 9. С.1585-1595.
5. Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Ж. вычисл. матем. и математической физики. 2004. Т. 44. №4. С.694–716.
6. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Издательство ЛКИ, 2009. –480 с
7. Яковлев М.Н. Оценки решений систем нагруженных интегро-дифференциальных уравнений, подчиненных многоточечным и интегральным краевым условиям // Численные методы и вопросы организации вычислений. 6, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 124, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1983, с.131–139.
8. Джумабаев Д.С., Иманчиев А.Е. Корректная разрешимость линейной многоточечной краевой задачи // Математический журнал, Алматы, 2005, т.5, №1(15), с.30-38
9. Шхануков-Лафишев М.Х. Локально-одномерная схема для нагруженного уравнения теплопроводности скраевыми условиями III рода // Ж. вычисл. матем. и математической физики. 2009. Т.49.№ 7. С. 1223–1231
10. Алиханов А.А, Березков А.М., Шхануков-Лафишев М.Х. Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации // Ж. вычисл. матем. и математической физики. 2008. Т.48. №9. С.1619-1628.
11. Егоров А. И. Основы теории управления, Физматлит, М., 2004, 504 с.
12. Анохин Ю.А., Горстко А.Б., Дамешек Л.Ю. и др. Математические модели и методы управления крупномасштабным водным объектом. Новосибирск: Наука, 1987.
13. Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. Численные решение задач оптимального управления нагруженными сосредоточенными системами // Ж. вычисл. матем. и математической физики. 2006. Т.46. №9. С.1566-1582.
14. Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. Численный метод решения нагруженных нелокальных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и математической физики, Москва, 2014. Т.54. №7. С.1096–1109.
15. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука,1983, 380 с.
16. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М: «Факториал». 2003, 824 с.

UOT 519.622.2

V.M. Abdullayev, S.Q. Talıbov

Yüklənmiş dinamik sistemlər üçün tərs məsələnin ədədi həlli

Yüklənmiş adi diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunan obyektlərdə yüklənmə yerlərində yüklənməyə reaksiya funksiyasının təyini məsələsinin ədədi həllinə baxılmışdır. Məsələnin həlli üçün yüklənmiş identifikasiya parametrlərə görə birinci tərtib ədədi üsulların tətbiqi üçün funksionalın qradiyentinin analitik ifadəsi alınmışdır. Təklif *olunan yanaşma xüsusi törəməli tənliklərlə təsvir olunan paylanmış parametrli sistemlərə düz xətlər üsulunu tətbiq etməklə baxılan məsələyə gətirməklə, yüklənmiş parametrlərin təyini üçün tətbiq etmək olar*

Açar sözlər: yüklənmiş diferensial tənlik, yüklənmiş yerlər, yüklənməyə reaksiya, optimal idarəetmə, qeyri-lokal şərtlər, tərs məsələ, inteqral şərtlər

V.M. Abdullayev, S.G. Talıbov

Numerical solution of inverse problems for loaded dynamic systems

The numerical solution of optimization problem of corresponding functions of reaction loading places respectively the objects described by systems of loaded ordinary differential equations are investigated. For optimization, the functional of the problem using numerical first-order methods analytical formulas for the gradient of the functional with respect to optimized parameters of loading were obtained. The results of numerical experiments are present. The proposed approach can be also applied to optimize parameters of loading for distributed systems described by differential equations with partial derivatives, which are reduced to the studied problem using the method of lines.

Keywords: loaded differential equations, place of loading, reaction to loading, optimal control, nonlocal conditions, the inverse problem, integral conditions

Институт Систем Управления НАН Азербайджана Представлено 06.04.2016