

УДК 519.6

Е.Р. АШРАФОВА

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭВОЛЮЦИОННЫМИ ПРОЦЕССАМИ ПРИ ОТСУТСТВИИ ТОЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ ОБ ИХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

Исследуются задачи оптимального управления эволюционными процессами при неточно заданных начальных условиях. В качестве иллюстрации рассматриваются два процесса: процесс теплопроводности и волновой процесс. Для соответствующих задач оптимального управления получены аналитические формулы для градиентов целевых функционалов. Эти формулы позволяют для решения задач использовать численные методы оптимизации первого порядка.

Ключевые слова: задача без начальных условий, задача оптимального управления, процесс теплопроводности, волновой процесс, метод проекции градиента.

1. Введение. Важным классом задач о распространении граничного режима являются «задачи без начальных условий». Если управление граничным режимом действует достаточно долго, то благодаря трению, присущему всякой реальной физической системе, влияние начальных данных на поведение процесса с течением времени ослабевает. Таким образом мы естественно приходим к задаче без начальных условий.

Начало изучению краевых задач без начальных условий для параболических и гиперболических уравнений принадлежит А.Н. Тихонову [1], который предложил метод исследования краевых задач без начальных условий, привел их первое строгое решение [2]. В его известной работе [3] была доказана единственность решения задачи без начальных условий (задачи Фурье) для уравнения теплопроводности.

В данной работе исследуются задачи оптимального управления процессами, описываемыми дифференциальными уравнениями параболического и гиперболического типов при отсутствии точной информации о начальных значениях состояния процесса. Такие задачи возникают при управлении многими реальными длительно функционирующими эволюционными процессами, значения начального состояния процесса которых уже не влияют на текущие их состояния. Возможны и такие случаи, когда по каким-то причинам невозможно точно измерить начальное состояние процесса. В данной работе предлагается подход к оптимальному управлению процессами с неточно заданными начальными состояниями.

2. Постановка задач. Рассматриваются две задачи. Первая является задачей оптимального управления относительно дифференциального уравнения параболического типа, вторая – относительно гиперболического уравнения. Практическим примером первой задачи является оптимальное управление процессом нагрева стержня, пластины и т.п., а для второй – оптимальное управление, например, процессом трубопроводного транспорта углеводородного сырья.

При изучении этих процессов в моменты времени, достаточно удаленные от начального, влияние начальных условий практически не сказывается на дальнейшее функционирование [9, 12]. В этом случае рассматриваются задачи оптимального управления процессами с заданными каким-либо образом множествами возможных начальных условий.

Задача 1. Рассмотрим краевую задачу, описывающую процесс нагрева ограниченного стержня:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.1)$$

$$u_x(0, t) = v_0(t), \quad u_x(l, t) = v_l(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (2.2)$$

где $u = u(x, t)$ – фазовое состояние процесса (температура стержня в точке x в момент t), определяемое из решения краевой задачи (2.1)-(2.2) при соответствующем допустимом значении оптимизируемой кусочно-непрерывной управляющей вектор-функции $v = (v_0(t), v_l(t))^*$; $f(x, t)$ – заданная функция, определяющая функционирование внутренних или внешних источников; a – коэффициент температуропроводности; «*» знак транспонирования.

Будем предполагать, что распределение температуры в стержне в начальный момент времени $t = 0$ неизвестно, т.е. начальное состояние процесса $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in [0, l]$, точно не задано, но исходя из априорной информации об исследуемом процессе известно, что функции, определяющие возможные начальные состояния процесса, принадлежат некоторому допустимому множеству

$$D = \{u_0(x) : u_0(x) \in L_2[0, l], \underline{u}_0 \leq u_0(x) \leq \bar{u}_0\}. \quad (2.3)$$

В частности, множество возможных начальных состояний может определяться конечным числом заданных функций:

$$D_N = \{u_0^n(x) : u_0^n(x) \in L_2[0, l], n = 1, 2, \dots, N\},$$

где $\underline{u}_0, \bar{u}_0, N$ – заданные величины. Будем предполагать, что исходя из технологических и технических условий имеются ограничения на оптимизируемые значения краевых условий, т.е. управления принадлежит множеству

$$V = \{v(t) \in L_2^2[0, T] : \underline{v}_0 \leq v_0(t) \leq \bar{v}_0, \underline{v}_l \leq v_l(t) \leq \bar{v}_l \text{ п.в. на } [0, T]\}, \quad (2.4)$$

где $\underline{v}_0, \underline{v}_l, \bar{v}_0, \bar{v}_l$ – заданные соответственно нижние и верхние допустимые значения управлений.

Так как в рассматриваемой задаче управление принадлежит классу $L_2^2[0, T]$, то классического решения задачи не существует. Поэтому решение начально-краевой задачи будем понимать в обобщенном смысле. Известно [6, с.153-164], что при каждом допустимом управлении $v \in V$ задача (2.1)-(2.2) с одним из допустимых начальных условий из D или D_N имеет обобщенное решение и притом единственное.

Обозначим через $H = L_2^2[0, T]$ гильбертово пространство кусочно-непрерывных двумерных вектор-функций [5, с.572]. Обобщенным решением рассматриваемой начально-краевой задачи, соответствующей управлению $v \in H$, будем называть функцию $u(x, t) = u(x, t; v) \in H^{1,0}((0, l) \times [0, T])$, имеющую следы $u(x, \cdot) \in L_2[0, T]$ при всех $x \in [0, l]$ непрерывные в метрике $L_2[0, l]$, следы $u(\cdot, t) \in L_2[0, l]$ при всех $t \in [0, T]$ непрерывные в метрике $L_2[0, T]$, и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_0^l u(x, T)\mu(x, T)dx - \int_0^l u_0(x)\mu(x, 0)dx - \iint_{\Omega} (u\mu_t + a^2 u_x \mu_x) dx dt - \iint_{\Omega} f \mu dx dt + \\ + a^2 \int_0^T (v_l(t)\mu(l, t) - v_0(t)\mu(0, t)) dt = 0,$$

при всех $\mu = \mu(x, t) \in H^1((0, l) \times [0, T])$, кроме того след $u(\cdot, t)$ при $t = 0$ совпадает с соответствующей функцией $u_0(x) \in D$ почти всюду на $[0, l]$.

Требуется, управляя температурой, влияющей на краевые условия, к заданному моменту $T > 0$ распределение температуры в стержне сделать как можно ближе к заданному распределению $U(x)$, $0 \leq x \leq l$. Задача заключается в нахождении таких значений граничных управлений $v_0(t), v_l(t)$, $t \in (0, T]$, при которых функционал, заданный, например, в виде:

$$J(v) = \frac{1}{\text{mes}D} \int_D I(v, u_0) \rho(u_0) du_0 \rightarrow \min, \quad (2.5)$$

$$I(v, u_0) = \int_0^l \left(u(x, T; v, u_0(x)) - U(x) \right)^2 dx + \alpha \|v(t)\|_{L_2[0, T]}^2,$$

принял минимальное значение. Здесь $\|\cdot\|_{L_2^2[0, T]}$ – норма вектор-функции; $\alpha > 0$ – весовой коэффициент. Функционал (2.5) определяет оценку среднего значения отклонения состояния процесса при $t = T$ от заданного желаемого состояния $U(x)$ для всевозможных начальных условий $u_0(x) \in D$; $\rho(u_0)$ – заданная функция плотности распределения начальных значений на множестве D .

Задача 2. Рассмотрим волновой процесс, описываемый следующей системой дифференциальных уравнений гиперболического типа [4, 8, 10]:

$$\begin{cases} -\frac{\partial P(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} + aQ(x, t), & t \in (0, T), \quad x \in (0, l), \\ -\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x}, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$P(0, t) = v_0(t), P(l, t) = v_l(t), \quad t \in (0, T), \quad (2.7)$$

где $P(x, t)$, $Q(x, t)$ – фазовые состояния процесса (например, давление и расход транспортируемого сырья в точке x трубопровода в момент времени t), определяемые из решения системы (2.6)-(2.7) при соответствующем допустимом значении оптимизируемой управляющей вектор-функции $v = (v_0(t), v_l(t))$, $t \in [0, T]$; a – коэффициент трения. Если волновой процесс (2.6), (2.7) наблюдается достаточно долго, т.е. T достаточно велико, начиная с какого-то момента времени $t_0 > 0$ влияние начальных условий уже существенно не сказывается на поведение системы, причем $t_0 \ll T$. Будем предполагать неизвестным начальное состояние процесса в момент времени его зарождения при $t = 0$, т.е. значения

$$Q(x, 0) = Q_0(x), P(x, 0) = P_0(x), \quad x \in [0, l], \quad (2.8)$$

определяющие начальное состояние процесса точно не заданы, но исходя из априорной информации об исследуемом процессе известны его возможные значения, определяемые множеством функций

$$D = \{u_0(x) = (Q_0(x), P_0(x)): Q_0(x) \in L_2[0, l], P_0(x) \in L_2[0, l], x \in [0, l]\}. \quad (2.9)$$

Возможно, что вместо множества D имеется множество D_N , определенное конечным числом функций:

$$Q^n(x, 0) = Q_0^n(x), P^n(x, 0) = P_0^n(x), \quad x \in [0, l], n = 1, 2, \dots, N. \quad (2.10)$$

Будем предполагать, что, исходя из технологических и технических условий, имеются ограничения на оптимизируемые управляющие кусочно-непрерывные вектор-функции $v(t)$. Например, в задачах оптимального управления транспортировкой нефти по трубопроводу необходим обязательный учет ограничений, исходя из режимно-технологических и технических возможностей эксплуатации оборудования, при помощи которого осуществляется процесс перекачки сырья.

Множество допустимых управлений может быть задано в виде:

$$V = \{v(t) = (v_0(t), v_l(t)) \in L_2^2[0, T]: \underline{v}_0 \leq v_0(t) \leq \overline{v}_0, \underline{v}_l \leq v_l(t) \leq \overline{v}_l \text{ п.в. на } [0, T]\}, \quad (2.11)$$

где $\underline{v}_0, \underline{v}_l, \overline{v}_0, \overline{v}_l$ – заданные соответственно нижние и верхние допустимые значения расходов и давлений, с которыми могут работать насосные станции.

Так как в рассматриваемой задаче управление принадлежит классу кусочно-непрерывных функций, то классического решения рассматриваемой задачи не существует.

Поэтому решение задачи будем понимать в обобщенном смысле. Известно [6], что при каждом допустимом управлении $v \in H$ задача (2.6)-(2.8) с одним из начальных условий из (2.9) или (2.10) имеет обобщенное решение и притом единственное.

Обобщенным решением рассматриваемой задачи, соответствующему управлению $v \in H$, будем называть пару функций $Q(x, t) = Q(x, t; v), P(x, t) = P(x, t; v) \in H((0, l) \times (0, T))$, имеющие следы $Q(x, \cdot), P(x, \cdot) \in L_2[0, T]$, непрерывные в метрике $L_2[0, l]$ при всех $x \in [0, l]$, следы $Q(\cdot, t), P(\cdot, t) \in L_2[0, l]$, непрерывные в метрике $L_2[0, T]$ при всех $t \in [0, T]$, и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_0^T (v_l(t)\mu(l, t) - v_0(t)\mu(0, t))dt - \int_0^l (Q_0(x)\mu(x, 0) + P_0(x)\eta(x, 0))dx - \\ - \iint_{\Omega} (P(x, t)\mu_x(x, t) + Q(x, t)\mu_t(x, t) + aQ(x, t)\mu(x, t))dxdt + \\ - \iint_{\Omega} P(x, t)\psi_t(x, t) + c^2Q(x, t)\eta_x(x, t)dxdt = 0$$

при всех $(\mu(x, t), \eta(x, t)) \in H^1((0, l) \times (0, T))$ таких, что $\eta(l, t) = \eta(0, t) = 0$, след которых при $t = T$ равен нулю.

Требуется, управляя граничными условиями (например, давлением на выходе насосных станций, установленных на концах трубопровода), к заданному моменту времени $T > 0$ привести волновой процесс, характеризуемый давлением и расходом сырья, в режим как можно меньше отличающийся от некоторого заданного состояния. Задача заключается в нахождении таких значений граничных управлений $v_0(t), v_l(t), t \in (0, T]$, при которых функционал, заданный, в частности, в виде:

$$J(v) = \frac{1}{mesD} \int_D I(v, u_0) \rho(u_0) du_0 \rightarrow \min_{v \in V}, \quad (2.12)$$

$$I(v, u_0) = \int_0^l \left[(Q(x, T; v, u_0) - q_T(x))^2 + (P(x, T; v, u_0) - p_T(x))^2 \right] dx + \alpha \|v(t)\|_{L_2^2[0, T]}^2,$$

принял минимальное значение. Здесь $\|\cdot\|_{L_2^2[0, T]}$ – норма вектор-функции; $\alpha > 0$ – весовой коэффициент. Функционал (2.12) определяет оценку среднего значения отклонения состояния процесса при $t = T$ от заданного желаемого состояния $(q_T(x), p_T(x))$ для всевозможных начальных условий $u_0(x) = (Q_0(x), P_0(x)) \in D$; $\rho(u_0)$ – функция плотности распределения начальных значений на множестве D . В исследовании задач как краевой, так и оптимального управления важную роль играет интервал времени $[t_0, T]$, в котором состояние процесса уже почти не зависит от значений начальных условий при $t = 0$.

3. Формулы для численного решения рассматриваемых задач. Для численного решения рассматриваемых задач оптимального управления предлагается использовать итерационные методы оптимизации первого порядка, основанные на применении полученных ниже аналитических формул градиента целевого функционала по управляющим функциям. Можно использовать методы проекции градиента

$$v^{k+1} = \text{Pr}_V(v^k - \lambda_k \text{grad}J(v^k)), \quad k = 0, 1, \dots$$

или проекции сопряженного градиента [5]. Здесь $v^0 = [v_0^0(t), v_l^0(t)]$ – некоторое заданное начальное значение управления; $\text{grad}J(v)$ – градиент целевого функционала по оптимизируемым управлениям; λ_k – величина шага одномерного поиска в направлении антиградиента функционала; $\text{Pr}_V(\cdot)$ – оператор проектирования функции на допустимое

множество управлений V (для позиционных ограничений вида (2.4), (2.11) этот оператор имеет простой вид [5]).

Ниже, для получения формул градиента функционала, будет использован метод вариации оптимизируемых параметров [5].

Сделаем одно замечание, существенно учитываемое далее. Все возможные начальные условия, которые могут принимать рассматриваемые процессы как в первой, так и во второй задаче, взаимно независимы, а следовательно не зависимы и значения градиентов, вычисленные при различных начальных условиях $u_0(x)$. Тогда для градиентов функционалов в первой и второй задачах имеет место:

$$\text{grad } J(v) = \frac{1}{\text{mes}D} \int_D \text{grad } I(v, u_0) \rho(u_0) du_0.$$

Поэтому ниже получим формулы для градиента функционала $\text{grad} I(v; u_0)$ при каком-либо одном произвольно выбранном допустимом начальном условии $u_0(x)$ рассматриваемого процесса.

3.1. В случае первой краевой задачи возьмем два допустимых управления: $v = v(t)$ и $v + \Delta v = v(t) + \Delta v(t)$. Пусть $u(x, t; v, u_0(x)), u(x, t; v + \Delta v, u_0(x))$ – решения краевой задачи (2.1)-(2.4), соответствующие этим управлениям при каких-либо допустимых заданных начальных условиях $u_0(x)$. Обозначим

$$\Delta u(x, t) = u(x, t; v + \Delta v, u_0(x)) - u(x, t; v, u_0(x)).$$

Из (2.1)-(2.4) следует, что $\Delta u(x, t)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \Delta u_t &= a^2 \Delta u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \\ \Delta u_x(0, t) &= \Delta v_0(t), \quad \Delta u_x(l, t) = \Delta v_l(t), \quad 0 < t \leq T, \\ \Delta u_0(x) &= 0, \quad x \in [0, l]. \end{aligned}$$

Тогда приращение функционала (2.5) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \Delta I(v, u_0) &= 2 \int_0^l [u(x, T; v, u_0(x)) - U(x)] \Delta u(x, T) dx + 2\alpha \int_0^T v(t) \Delta v(t) dt \\ &\quad + o(\Delta u(x, T)) + o(\Delta v(t)). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Пусть $\psi(x, t) = \psi(x, t; v, u_0)$ является решением следующей вспомогательной сопряженной краевой задачи

$$\psi_t + a^2 \psi_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \tag{3.2}$$

$$\psi(x, T) = 2[u(x, T) - U(x)], \quad x \in [0, l], \tag{3.3}$$

$$\psi(0, t) = 0, \quad \psi(l, t) = 0, \quad t \in (0, T). \tag{3.4}$$

Здесь $u(x, T) = u(x, T; v, u_0(x))$ – решение начально-краевой задачи (2.1)-(2.4) при каких-либо допустимых $v = v(t)$ и $u_0 = u_0(x)$.

Пользуясь оценкой, полученной в [5, с.589; 6, с.197-234] для более общего случая управления из класса измеримых функций:

$$\int_{\Omega} |\Delta u(x, t)|^2 dx \leq C \int_0^T |\Delta v(t)|^2 dt,$$

где $C > 0$ – постоянная, не зависящая от выбора Δv , и используя (3.1)-(3.4), для приращения функционала будем иметь:

$$\Delta I(v, u_0) = \int_0^T (\psi_x(0, t) - \psi_x(l, t)) \Delta v(t) dx + 2\alpha \int_0^T v(t) \Delta v(t) dt.$$

Тогда формулы для компонент градиента целевого функционала по управляющим функциям $v_0(t)$, $v_l(t)$ определяются в следующем виде:

$$\text{grad}_{v_0(t)} J(v, u_0) = \frac{1}{\text{mes}D} \int_D [\psi_x(0, t) + 2v_0(t)] \rho(u_0) du_0, t \in [0, T], \quad (3.5)$$

$$\text{grad}_{v_l(t)} J(v, u_0) = -\frac{1}{\text{mes}D} \int_D [\psi_x(l, t) + 2v_l(t)] \rho(u_0) du_0, t \in [0, T]. \quad (3.6)$$

3.2. Для получения формул градиента целевого функционала в случае второй задачи возьмем два допустимых управления: $v = v(t)$ и $v + \Delta v = v(t) + \Delta v(t)$. Пусть $P(x, t; v, u_0(x))$, $P(x, t; v + \Delta v, u_0(x))$, $Q(x, t; v, u_0(x))$, $Q(x, t; v + \Delta v, u_0(x))$ – решения краевой задачи (2.6)-(2.8), соответствующие этим управлениям при каких-либо выбранных допустимых начальных условиях $u_0(x) = (Q_0(x)P_0(x))$. Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta P(x, t) &= P(x, t; v + \Delta v, u_0(x)) - P(x, t; v, u_0(x)), \\ \Delta Q(x, t) &= Q(x, t; v + \Delta v, u_0(x)) - Q(x, t; v, u_0(x)), \end{aligned}$$

Из (2.6), (2.7) следует, что пара функций $\Delta P(x, t)$, $\Delta Q(x, t)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} -\frac{\partial \Delta P(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \Delta Q(x, t)}{\partial t} + a\Delta Q(x, t), & t \in (0, T), \quad x \in (0, l), \\ -\frac{\partial \Delta P(x, t)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \Delta Q(x, t)}{\partial x}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta P(0, t) &= \Delta v_0(t), \Delta P(l, t) = \Delta v_l(t), t \in (0, T), \\ \Delta u_0(x) &= (\Delta P(x, 0), \Delta Q(x, 0)) = 0, x \in [0, l]. \end{aligned}$$

Тогда приращение функционала (2.12) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \Delta I(v, u_0) &= 2 \int_0^l \{ [Q(x, T; v, u_0(x)) - q_T(x)] \Delta Q(x, T) + \\ &+ [P(x, T; v, u_0(x)) - p_T(x)] \Delta P(x, T) \} dx + 2\alpha \int_0^T v(t) \Delta v(t) dt + \\ &+ o(\Delta P(x, T)) + o(\Delta P(x, T)) + o(\Delta v(t)). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Пусть $\psi(x, t) = (\psi_1(x, t), \psi_2(x, t))$ является решением следующей вспомогательной сопряженной краевой задачи

$$\begin{cases} -\frac{\partial \psi_1(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2(x, t)}{\partial t}, & x \in (0, l), \quad t \in (0, T), \\ -\frac{\partial \psi_1(x, t)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \psi_2(x, t)}{\partial x} - 2a\psi_1(x, t), \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\psi_1(x, T) = -2[Q(x, T) - q_T(x)], \quad \psi_2(x, T) = -2[P(x, T) - p_T(x)], \quad x \in [0, l], \quad (3.9)$$

$$\psi_1(0, t) = 0, \quad \psi_1(l, t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (3.10)$$

Пользуясь оценкой

$$\int_0^T \int_0^l (|\Delta Q(x, t)|^2 + |\Delta P(x, t)|^2) dx dt \leq C \int_0^T |\Delta v(t)|^2 dt,$$

полученной в [5, 6] для более общего случая управления из класса измеримых функций, где $C > 0$ – постоянная, не зависящая от выбора Δv , для приращения функционала (2.12), используя (3.7)-(3.10), будем иметь:

$$\Delta I(v, u_0) = - \int_0^T (\psi_1(0, t) + \psi_1(l, t)) \Delta v(t) dt + 2\alpha \int_0^T v(t) \Delta v(t) dt + o(\Delta v(t)).$$

Тогда формулы для компонент градиента целевого функционала по управляющим функциям $v_0(t)$, $v_l(t)$ определяются в следующем виде:

$$\text{grad}_{v_0(t)} J(v, u_0) = - \frac{1}{\text{mes} D} \int_D (\psi_1(0, t) + 2\alpha v_0(t)) \rho(u_0) du_0, \quad t \in [0, T], \quad (3.11)$$

$$\text{grad}_{v_l(t)} J(v, u_0) = - \frac{1}{\text{mes} D} \int_D (\psi_1(l, t) + 2\alpha v_l(t)) \rho(u_0) du_0, \quad t \in [0, T]. \quad (3.12)$$

4. Результаты численных экспериментов. Рассмотрим следующую тестовую задачу на примере оптимального управления процессом движения жидкости на линейном участке магистрального трубопровода. Известно [4, 10], что движение жидкости в трубопроводе описывается системой дифференциальных уравнений гиперболического типа вида (2.6)-(2.7).

Предположим, что в трубопроводе длиной $l = 100$ км, диаметром $d = 0.53$ м, транспортируется нефть с кинематической вязкостью $\nu = 1.5 \cdot 10^{-4}$ (м²/сек), плотностью $\rho = 920$ (кг/м³). В этом случае $2a = \frac{32\nu}{d^2} = 0.017$. Скорость звука в среде принята равной $c = 1200$ (м/сек).

Будем предполагать, что процесс функционировал длительное время при $t < 0$, а в момент времени начала управления краевыми условиями при $t = 0$ режим точно не задан, а из технологических соображений известно, что расход и давление по участкам могут принимать значения в следующих диапазонах (множество D):

$$200 \leq \hat{Q}_0(x) \leq 210 \quad (\text{м}^3/\text{час}), \quad (4.1)$$

$$1500000 + x \leq \hat{P}_0(x) \leq 1700000 + x \quad (\text{Па}), \quad x \in [0, 1] \quad (\text{км}). \quad (4.2)$$

Вместо точных начальных условий будет использовано множество начальных условий D , удовлетворяющих ограничениям (4.1), (4.2). В частности, допустим, что возможные начальные условия для расхода и давления определены на конечном множестве D_N , полученном из D равномерным разбиением N точками с шагом $h_N = 10/N$. Тогда множество начальных условий будет задано следующим образом:

$$D_N = \{u_0^n(x) = (Q_0^n(x), P_0^n(x)): Q_0^n(x) = 200 + nh_N, \\ P_0^n(x) = 1500000 + x + 20000nh_N, x \in [0, l], n = 0, 1, 2, \dots, N\}. \quad (4.3)$$

Для расчета значений режимов процесса движения нефти в трубопроводе, т.е. численного решения начально-краевых задач вида (2.6)-(2.8) с начальными условиями $Q_0^n(x), P_0^n(x), n = 1, 2, \dots, N$, использован метод прогонки, при этом шаг по временной переменной равен $h_t = 0.83$ (сек), а шаг по пространственной переменной $h_x = 100$ м (в безразмерных величинах $h_t = 0.009, h_x = 0.001$, эти значения были определены по результатам специально проведенных экспериментов для определения эффективных значений этих параметров).

Пусть в момент времени $t = T=90$ сек во всем трубопроводе желательным является новый установившийся режим, при котором расход и давление по участкам должны иметь следующие значения:

$$\hat{Q}_T(x) = 130 \text{ (м}^3\text{/час)}, \hat{P}_T(x) = 2400000 - 2x \text{ (Па)}. \quad (4.4)$$

В таблицах 1,2 и 3 приведены полученные результаты минимизации функционала (2.12) для различных начальных значений управлений и для различных количеств начальных условий вида (4.3), (4.3), т.е. для различных значений N . На рисунках 1-3 приведены полученные графики оптимальных краевых управлений, а на рисунке 4 оптимальные траектории для каждой задачи.

Из результатов видно, что оптимальные значения управлений практически не зависят от задания точного значения начального условия, т.е. задачу оптимального управления при не точно заданных начальных условиях можно привести к решению задачи оптимального управления с множеством допустимых значений начальных условий.

Таблица 1
Результаты минимизации функционала (2.12) при $N = 3$

	$v_0^0(t)$ (Па)	$v_l^0(t)$ (Па)	$J_0(t)$	$J_{\min}(t)$
1	1300000-200000t	2500000-300000t	0,80091 0,80924 0,81786	0,00018
2	1500000-100000t	2800000-500000t	0,60363 0,60619 0,60904	0,00017
3	15600000	26400000	0,61091 0,60922 0,60783	0,00019
4	1300000-100000t	2900000-200000t	1,12287 1,12355 1,12452	0,00018

Таблица 2
Результаты минимизации функционала (2.12) при $N = 5$

	$v_0^0(t)$ (Па)	$v_l^0(t)$ (Па)	$J_0(v)$	$J_{\min}(v)$
1	1300000-100000t	2500000-300000t	0,80090 0,80587 0,81094 0,81611 0,82140	0,00017
2	1500000-100000t	2800000-500000t	0,60363 0,60513 0,60674 0,60845 0,61026	0,00017
3	15600000	26400000	0,61091 0,60986 0,60892 0,60808 0,60735	0,00017
4	1300000-100000t	2900000-200000t	0,61091 0,60986 0,60892 0,60808 0,60735	0,00017

Таблица 3
Результаты минимизации функционала (2.12) при $N = 6$

	$v_0^0(t)$ (Па)	$v_l^0(t)$ (Па)	$J_0(v)$	$J_{\min}(v)$
1	1300000-100000t	2500000-300000t	0,80091 0,80503 0,80924 0,81351 0,81786 0,82229	0,00016
2	1500000-100000t	2800000-500000t	0,60363 0,60488 0,60619 0,60758 0,60904 0,61057	0,00017
3	15600000	26400000	0,61091 0,61003 0,60922 0,60849 0,60783 0,60724	0,00016
4	1300000-100000t	2900000-200000t	1,12287 1,12317 1,12355 1,12400 1,12452 1,12512	0,00016

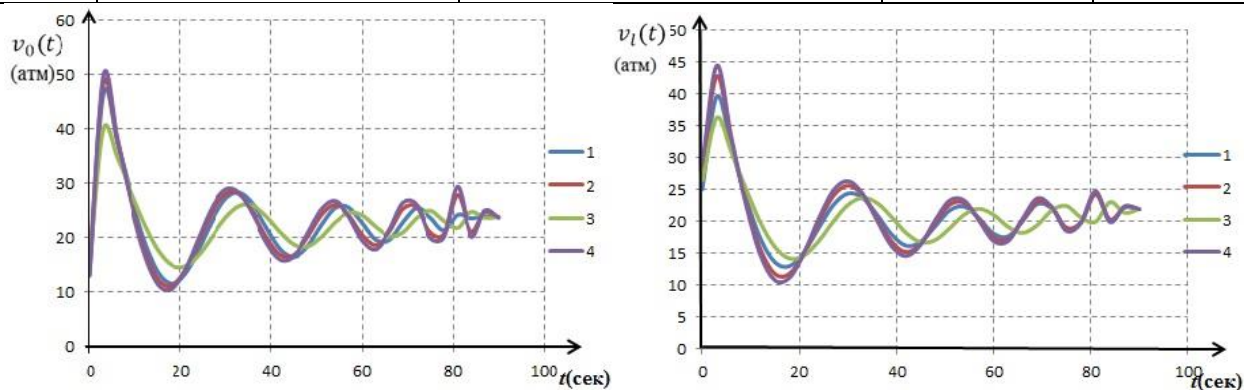


Рис. 1 Графики оптимальных управлений при $N = 3$

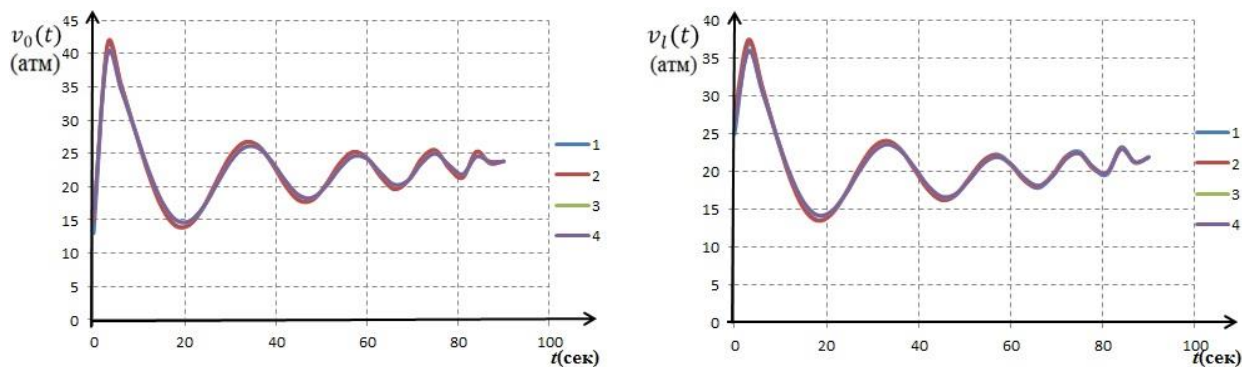


Рис. 2 Графики оптимальных управлений при $N = 5$

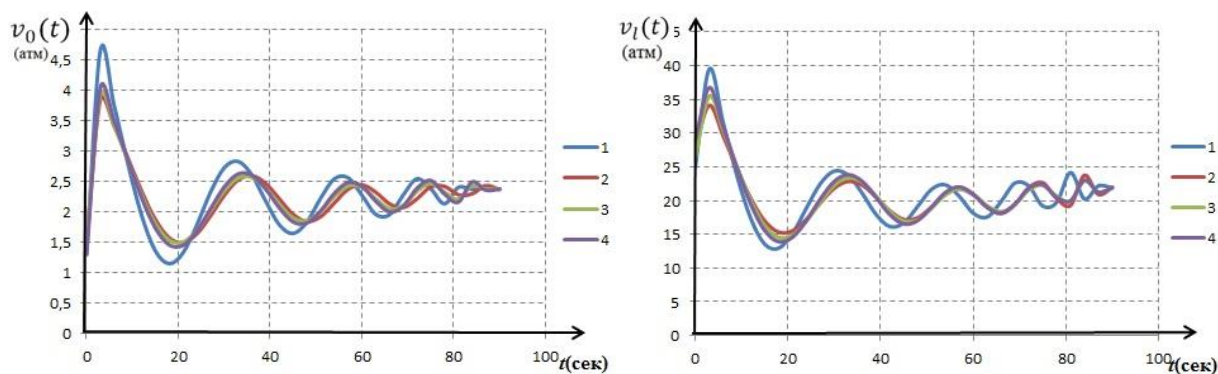


Рис.3 Графики оптимальных управлений при $N = 6$

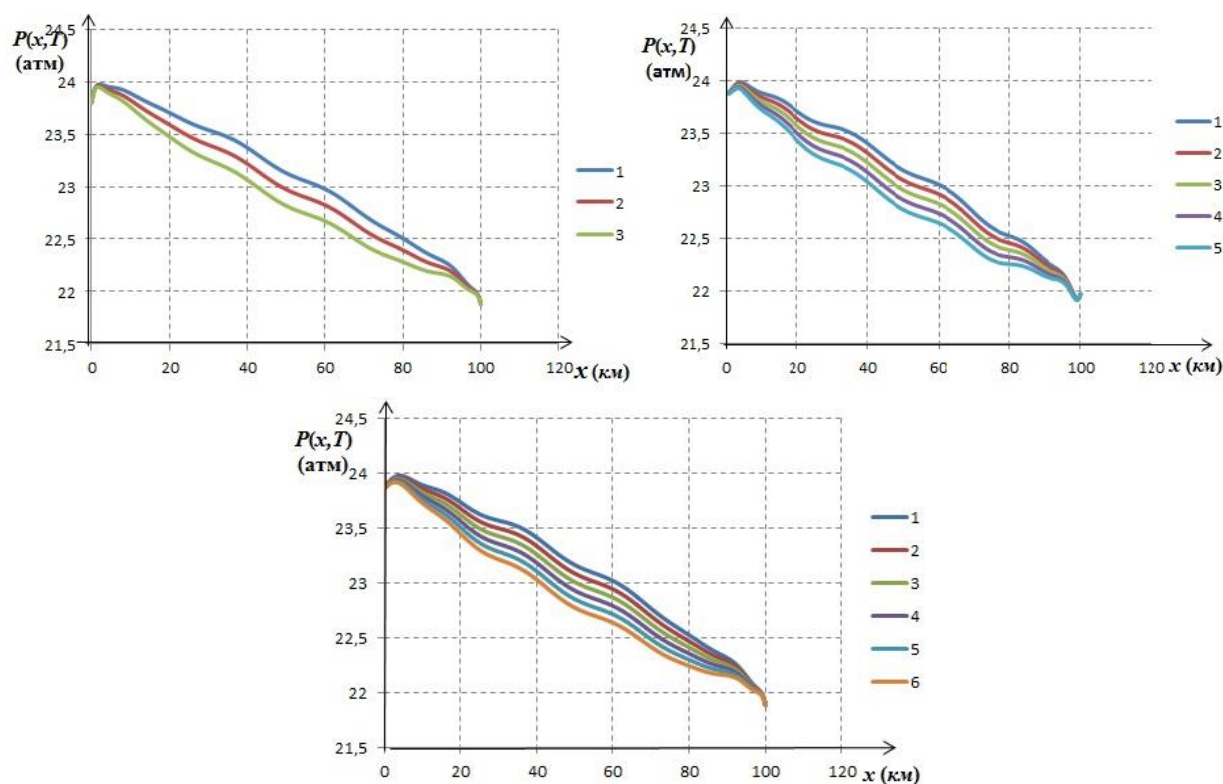


Рис.4 Графики давления, вычисленные для оптимальных значений управлений при различных N

4. Заключение. В работе проведено исследование постановок задач оптимального управления краевыми условиями эволюционных процессов, функционирующими длительное время, в связи с чем отсутствует точная информация о их начальном состоянии (начальных условиях). Учитывая, что в реальных процессах участвуют диссипативные члены, характеризующие сопротивление внутренней или внешней природы, со временем начальные условия перестают влиять на текущее состояние процесса. В этой связи важную роль играют лишь управляемые краевые условия. В работе приведены постановки задач управления подобными эволюционными процессами, получены формулы для выражения градиентов соответствующих функционалов, позволившие использовать численные методы оптимизации первого порядка.

Полученные результаты могут найти применение в исследованиях, связанных с управлением многими длительно функционирующими процессами с распределенными параметрами, описываемые системами уравнений с частными производными.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М. «Наука» 1977. 736с.
2. Вафодорова Г. О. Задачи без начальных условий для одного неклассического уравнения. Дифференц. уравнения, 2003, т. 39, № 2, с. 278-280.
3. Тихонов А. Н. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности. Матем. сборник, 1935, 42, № 2, с. 199-216.
4. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра, 1975, 199с.
5. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М. Факториал Пресс, 2002, 824 с.
6. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.Наука. 1973. 408с.
7. Турк В.И., Минаев А.В., Карелин В.Я. Насосы и насосные станции. М.: Стройиздат, 1977, 296 с.
8. Ильин В.А. Волновое управление с граничным управлением на одном конце при закрепленном втором конце // Дифференц.уравнения, 1999. Т. 35, №12. С.1640-1659.
9. Aidazade K.R., Asadova J.A. Analysis of the regimes of controlling transient processes in pipelines // Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2012, Vol. 85, No. 1, pp. 131-140.
10. Wichowski R. Hydraulic Transients Analysis in Pipe Networks by the Method of Characteristics (MOC) // Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics, 2006, Vol. 53, No. 3, pp. 267–291
11. Айда-заде К.Р., Ашрафова Е.Р. Расчет переходных режимов движения жидкости в трубопроводных сетях // Сибирский журнал индустриальной математики, 2015, Том XVIII, № 2(62), с. 12-23.
12. Ашрафова Е.Р. Анализ длительности зависимости режима движения жидкости в трубопроводе от начальных режимов // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной Академии Наук 2015, №2, с.9-16.

UOT 519.6

Y.R. Əşrəfova

Başlanğıc şərtlər haqqında dəqiq informasiya olmadıqda evolyusiya proseslərinin optimal idarəedilməsi

İşdə başlanğıc şərtləri dəqiq şəkildə verilməyən sərhəd məsələləri üçün optimal idarəetmə məsələlərinə baxılır. İki prosesə baxılır: istilikkeçirmə prosesi və dalğa prosesi. Uyğun optimal idarəetmə məsələləri üçün məqsəd funksionalının qradiyenti üçün analitik düsturlar alınıb. Bu düsturlar məsələnin həlli üçün birinci tərtib optimallaşdırma üsullarından istifadə etməyə imkan verir. Təklif edilən yanaşmanın istifadəsi ilə ədədi eksperimentlər və alınan nəticələrin analizi aparılmışdır.

Açar sözlər: başlanğıc şərtsiz məsələ, optimal idarəetmə məsələsi, istilikkeçirmə prosesi, dalğa prosesi, qradiyentin proyeksiyası üsulu

Y.R. Ashrafova

Optimal control of evolutionary processes in the absence of accurate information on their initial conditions

Optimal control problems for evolutionary processes without accurate information on the initial conditions are considered in the paper. We study two kinds of processes: the heat conductivity process and the wave process. The analytical formulas for the gradient of the target functional are obtained for corresponding optimal control processes. These formulas allow for using the first order optimization methods to solve the problems. The numerical experiments are carried out by using the proposed approach and an analysis of the obtained results is given.

Keywords: problem without initial conditions, optimal control problem, heat conductivity process, wave process, method of gradient projection