

УДК 517.9

А.Я. ДЖАББАРОВА

## ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ ТИПА КРОТОВА В ОДНОЙ ГИБРИДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ТИПА РОССЕРА

Рассматривается задача оптимального управления гибридными системами типа Россера. Получено достаточное условие оптимальности типа Кротова. Из него, в частности, получен аналог условия максимума Понтрягина.

**Ключевые слова:** система типа Россера, достаточное условие оптимальности, принцип максимума, гибридная система

**1. Введение.** Многие процессы из теории автоматов, физики и техники описываются так называемыми системами Россера [1-3]. В работах [4-9] рассмотрены граничные задачи оптимального управления типа Россера, доказан ряд необходимых условий оптимальности первого порядка при различных предположениях и исследованы случаи их вырождения.

В предлагаемой работе для одной задачи оптимального управления типа Россера доказано достаточное условие оптимальности типа Кротова [7, 8].

В частности, из установленного достаточного условия оптимальности выведено необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина [9, 10].

**2. Постановка задачи.** Пусть требуется минимизировать функционал

$$S(u, a, z, u) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} G(x, z(t_1, x)) + \int_{t_0}^{t_1} Q(t, y(t, x_1)) + \varphi(a(x_1)) \quad (2.1)$$

при ограничениях

$$u(t, x) \in U \subset R^r, \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1, \quad (2.2)$$

$$(z(t, x), y(t, x)) \in Z \times Y, \quad t \in T, \quad x \in X \cup x_1,$$

$$a(x) \in A, \quad x \in X \cup x_1,$$

$$\frac{\partial z(t, x)}{\partial t} = f(t, x, z, y), \quad (2.3)$$

$$y(t, x + 1) = g(t, x, z(t, x), y(t, x)),$$

$$z(t_0, x) = a(x),$$

$$y(t, x_0) = b(t), \quad (2.4)$$

где  $a(x)$  является решением задачи Коши

$$a(x + 1) = F(x, a(x), u(x)), \quad x \in X, \quad (2.5)$$
$$a(x_0) = a_0.$$

Здесь  $G(x, z)$ ,  $Q(t, x)$ ,  $\varphi(a)$  – заданные скалярные функции непрерывные по совокупности переменных,  $U, Z, Y, A$  – заданные непустые и ограниченные множества,  $f(t, x, z, y)$ ,  $F(x, a, u)$  ( $g(t, x, z, y)$ ) – заданные (заданная)  $n(m)$ -мерные (мерная) вектор-функции (вектор-функция) непрерывные (непрерывная) по совокупности переменных,  $b(t)$  – заданная  $m$ -мерная непрерывная вектор-функция,  $a_0$  – заданный постоянный вектор,  $u(x)$  –  $r$ -мерный вектор управляющих воздействий со значениями из  $U$ .

Квартет  $(u(x), a(x), z(t, x), y(t, x))$ , удовлетворяющий вышеприведенным ограничениям (2.2)-(2.5), назовем допустимым процессом.

Множество всех допустимых процессов обозначим через  $W$ .

**3. Основной результат.** Допустим, что заданы скалярные функции  $K^z(t, x, z)$ ,  $K^y(t, x, y)$ ,  $K^a(x, a)$ , причем  $K^z(t, x, z)$  непрерывна по  $(t, z)$  при всех  $x$  вместе с  $\partial K^z(t, x, z)/\partial z$ ,  $\partial K^z(t, x, z)/\partial t$ ;  $K^y(t, x, y)$  непрерывна по  $(t, y)$  при всех  $x$ ,  $K^a(x, a)$  непрерывна по  $a$  при всех  $x$ .

Множество функций  $\{K^z(t, x, z), K^y(t, x, y), K^a(x, a)\}$  с вышеприведенными свойствами обозначим через  $\Phi$  и назовем множеством функций Кротова для рассматриваемой задачи.

Пусть  $(K^z(t, x, z), K^y(t, x, y), K^a(x, a))$  некоторая функция Кротова из семейства  $\Phi$ . С его помощью определим следующие функции и функционалы

$$R_1(t, x, z, y) = \frac{\partial K^z(t, x, z)}{\partial t} + \frac{\partial K^{z'}(t, x, z)}{\partial z} f(t, x, z, y) + K^y(t, x + 1, y(t, x + 1)) - K^y(t, x, y(t, x)), \quad (3.1)$$

$$R_2(x, a, u) = K^a(x + 1, a(x + 1)) - K^a(x, a(x)) + K^z(t_0, x, z(t_0, x)), \quad (3.2)$$

$$\Gamma_1(z, y) = \sum_{x=x_0}^{x_1} [G(x, z(t_1, x)) + K^z(t_1, x, z(t_1, x))] + \int_{t_0}^{t_1} [Q(t, y(t, x_1)) + K^y(t, x_1, y(t, x_1))] dt, \quad (3.3)$$

$$\Gamma_2(a) = K^a(x_1, a(x_1)) + \varphi(a(x_1)). \quad (3.4)$$

**Определение 3.1.** Если для фиксированного допустимого процесса  $(u^o(x), a^o(x), z^o(t, x), y^o(t, x))$  существует функция Кротова  $(K^z(t, x, z), K^y(t, x, y), K^a(x, a))$  такая, что для всех допустимых процессов  $(u(x), a(x), z(t, x), y(t, x))$

$$\begin{aligned} R_1(t, x, z^o(t, x), y^o(t, x)) &\geq R_1(t, x, z(t, x), y(t, x)), \\ R_2(x, a^o(x), u^o(x)) &\geq R_2(x, a(x), u(x)), \end{aligned} \quad (3.5)$$

то будем говорить, что процесс  $(u^o(x), a^o(x), z^o(t, x), y^o(t, x))$  удовлетворяет расширенному условию максимума.

**Теорема 3.1.** Если допустимый процесс  $(u^o(x), a^o(x), z^o(t, x), y^o(t, x))$  удовлетворяет расширенному условию максимума и минимизирует функционалы (3.3), (3.4), то он является решением задачи (2.1)-(2.2).

**Доказательство.** Через  $(u(x), a(x), z(t, x), y(t, x))$  обозначим произвольный допустимый процесс. В силу условий теоремы ясно, что (3.1)-(3.4), (3.5):

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[ \frac{\partial K^z(t, x, z^o(t, x))}{\partial t} + \frac{\partial K^{z'}(t, x, z^o(t, x))}{\partial z} f(t, x, z(t, x), y(t, x)) + \right. \\ &\quad \left. + K^y(t, x + 1, y^o(t, x + 1)) - K^y(t, x, y^o(t, x)) \right] \geq \int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[ \frac{\partial K^z(t, x, z^o(t, x))}{\partial t} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial K^{z'}(t, x, z^o(t, x))}{\partial z} f(t, x, z, y) + K^y(t, x + 1, y(t, x + 1)) - K^y(t, x, y(t, x)) \right] dt, \\ &- \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [G(x, z^o(t_1, x)) + K^z(t_1, x, z^o(t_1, x))] - \int_{t_0}^{t_1} [Q(t, y^o(t, x_1)) + K^y(t, x_1, y^o(t, x_1))] dt \geq \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} &\geq - \sum_{x=x_0}^{x_1} [G(x, z(t_1, x)) + K^z(t_1, x, z(t_1, x))] - \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} [Q(t, y(t, x_1)) + K^y(t, x_1, y(t, x_1))] dt, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{x=x_0}^{x_1-1} [K^a(x+1, a^o(x+1)) - K^a(x, a^o(x))] + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} K^z(t_0, x, z^o(t_0, x)) \geq \\ &\geq \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [K^a(x+1, a(x+1)) - K^a(x, a(x))] + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} K^z(t_0, x, z(t_0, x)), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$-K^a(x_1, a^o(x_1)) - \varphi(a^o(x_1)) \geq -K^a(x_1, a(x_1)) - \varphi(a(x_1)). \quad (3.9)$$

Суммируя неравенства (3.6)-(3.9), будем иметь

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[ \frac{dK^z(t, x, z^o(t, x))}{dt} + K^y(t, x+1, y^o(t, x+1)) - K^y(t, x, y^o(t, x)) \right] dt + \\ &\quad + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [K^a(x+1, a^o(x+1)) - K^a(x, a^o(x))] + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} K^z(t_0, x, z^o(t_0, x)) - \\ &\quad - K^a(x_1, a^o(x_1)) - \varphi(a^o(x_1)) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [G(x, z^o(t_1, x)) + K^z(t_1, x, z^o(t_1, x))] - \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} [Q(t, y^o(t, x_1)) + K^y(t, x_1, y^o(t, x_1))] dt \geq \\ &\geq \int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[ \frac{dK^z(t, x, z(t, x))}{dt} + K^y(t, x+1, y(t, x+1)) - K^y(t, x, y(t, x)) \right] dt + \\ &\quad + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [K^a(x+1, a(x+1)) - K^a(x, a(x))] + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} K^z(t_0, x, z(t_0, x)) - \\ &\quad - K^a(x_1, a(x_1)) - \varphi(a(x_1)) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [G(x, z(t_1, x)) + K^z(t_1, x, z(t_1, x))] - \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} [Q(t, y(t, x_1)) + K^y(t, x_1, y(t, x_1))] dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} [K^z(t_1, x, z^o(t_1, x)) - K^z(t_0, x, z^o(t_0, x))] -$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{t_0}^{t_1} [K^y(t, x_1, y^o(t, x_1)) - K^y(t, x_1, y^o(t, x_0))] dt - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} K(t, x_1, y^o(t, x)) dt + \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} K(t, x_1, y^o(t, x)) dt + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} K^z(t_0, x, z^o(t_0, x)) + K^a(x_1, a^o(x_1)) - K^a(x_0, a^o(x_0)) + \\
 & + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} K^a(x, a^o(x)) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} K^a(x, a^o(x)) - K^a(x_1, a^o(x_1)) - \varphi(a^o(x_1)) - \\
 & - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} G(x, z^o(t_1, x)) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} K^z(t_0, x, z^o(t_1, x)) - \int_{t_0}^{t_1} Q(t, y^o(t, x_1)) dt - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} K^y(t, x_1, y^o(t, x_1)) dt \geq \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [K^z(t_1, x, z(t_1, x)) - K^z(t_0, x, z(t_0, x))] - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} [K^y(t, x_1, y^o(t, x_1)) - K^y(t, x_1, y^o(t, x_0))] dt - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} K(t, x, y(t, x)) dt + \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} K(t, x, y(t, x)) dt + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} K^z(t_0, x, z^o(t_0, x)) + K^a(x_1, a^o(x_1)) - K^a(x_0, a^o(x_0)) + \\
 & + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} K^a(x, a(x)) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} K^a(x, a(x)) - K^a(x_1, a(x_1)) - \varphi(a(x_1)) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} G(x, z(t_1, x)) - \\
 & - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} K^z(t_1, x, z(t_1, x)) - \int_{t_0}^{t_1} Q(t, y(t, x_1)) dt - \int_{t_0}^{t_1} K^y(t, x_1, y(t, x_1)) dt.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
 & - \int_{t_0}^{t_1} K^y(t, x_0, y^o(t, x_0)) dt - K^a(x_0, a^o(x_0)) - \varphi(a^o(x_1)) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} G(x, z^o(t_1, x)) - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} Q(t, y^o(t, x_1)) dt \geq - \int_{t_0}^{t_1} K^y(t, x_0, y(t, x_0)) dt - K^a(x_0, a(x_0)) - \varphi(a(x_1)) - \\
 & - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} G(x, z(t_1, x)) - \int_{t_0}^{t_1} Q(t, y(t, x_1)) dt.
 \end{aligned}$$

Таким образом получаем, что

$$\varphi(a^o(x_1)) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} G(x, z^o(t_1, x)) - \int_{t_0}^{t_1} Q(t, y^o(t, x_1)) dt \leq \varphi(a(x_1)) -$$

$$+ \sum_{x=x_0}^{x_1-1} G(x, z(t_1, x)) + \int_{t_0}^{t_1} Q(t, y(t, x_1)) dt,$$

т.е.

$$S(u^o, v^o) \leq S(u, v). \quad (3.10)$$

Из (3.10), в силу произвольности допустимого процесса  $(u(t), v(x), a(x), z(t, x))$ , получаем утверждение теоремы.

Теперь предположим, что множества  $Z, Y, A$  открыты, а функции  $f(t, x, z, y), g(t, x, z, y), F(x, a, u)$  при всех фиксированных  $x$  непрерывны по совокупности переменных вместе с частными производными  $f_z(t, x, z, y), f_y(t, x, z, y), g_z(t, x, z, y), g_y(t, x, z, y), F_a(x, a, u)$ .

Пусть допустимый процесс  $(u^o(t), v^o(x), a^o(x), z^o(t, x), y^o(t, x))$  удовлетворяет расширенному условию максимума и минимизирует функционалы (3.3), (3.4).

По предположению множества  $Z, Y, A$  открыты. Поэтому получаем, что

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial R_1(\cdot)}{\partial z(t, x)} \right|_{(u^o(t), v^o(x), a^o(x), z^o(t, x), y^o(t, x))} &= \frac{\partial^2 K^z(t, x, z^o)}{\partial t \partial z} + \frac{\partial^2 K^z(t, x, z^o)}{\partial z^2} f(t, x, z^o, y^o) + \\ &+ \frac{\partial K^z(t, x, z^o)}{\partial z} \frac{\partial f(t, x, z^o, y^o)}{\partial z} + \frac{\partial K^y(t, x+1, y(t, x+1))}{\partial y(t, x+1)} \frac{\partial g^o(t, x, z^o, y^o)}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial R_1(\cdot)}{\partial y} \right|_{(u^o(t), v^o(x), a^o(x), z^o(t, x), y^o(t, x))} &= \frac{\partial K^{z'}(t, x, z)}{\partial z} \frac{\partial f(t, x, z, y)}{\partial z} + \\ &+ \frac{\partial K^y(t, x+1, y(t, x+1))}{\partial y(t, x+1)} \frac{\partial g(t, x, z^o, y^o)}{\partial y(t, x)} - \frac{\partial K^y(t, x, y^o(t, x))}{\partial y(t, x)} = 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial R_1(\cdot)}{\partial a} \right|_{(u^o(t), v^o(x), a^o(x), z^o(t, x), y^o(t, x))} &= \frac{\partial K^a(x+1, a^o(x+1))}{\partial a(x+1)} \frac{\partial F(x, a^o(x), u^o(x))}{\partial a(x)} - \\ &- \frac{\partial K^a(x, a^o(x))}{\partial a(x)} + \frac{\partial K^z(t_0, x, a^o(x))}{\partial a(x)} = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$R_2(x, a^o(x), u^o(x)) \geq R_2(x, a^o(x), u(x)), \quad (3.14)$$

Далее, из уравнения Эйлера для функционалов (3.3), (3.4) имеем

$$\frac{\partial G(x, z^o(z(t_1, x)))}{\partial z} = - \frac{\partial K^z(t_1, x, z^o(t_1, x))}{\partial z}, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial Q(t, y^o(t, x_1))}{\partial y} = - \frac{\partial K^y(t, x_1, y^o(t, x_1))}{\partial y}, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial K^a(x_1, a(x_1))}{\partial a} = - \frac{\partial \varphi(a^o(x_1))}{\partial a}. \quad (3.17)$$

Положим

$$\begin{aligned} p^o(t, x) &= \frac{\partial K^z(t, x, z^o(t, x))}{\partial z}, \\ q^o(t, x) &= - \frac{\partial K^y(t, x+1, y^o(t, x+1))}{\partial y(t, x+1)}, \\ \Psi^o(x) &= \frac{\partial K^a(a^o(x+1))}{\partial a(x+1)}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$H(t, x, z, y, p^o, q^o) = p^o f(t, x, z, y) + q^o g(t, x, z, y),$$

$$M(x, a, u, \psi^o) = \psi^o F(x, a, u).$$

С учетом обозначений (3.18) из (3.11)-(3.13), имеем

$$\frac{\partial p^o(t, x)}{\partial t} + p^{o'}(t, x) \frac{\partial f(t, x, z^o(t, x), y^o(t, x))}{\partial y} + q^o(t, x) \frac{\partial g(t, x, z^o(t, x), y^o(t, x))}{\partial z} = 0,$$

$$p^o(t, x) \frac{\partial f(t, x, z^o(t, x), y^o(t, x))}{\partial y} + q^o(t, x) \frac{\partial g(t, x, z^o(t, x), y^o(t, x))}{\partial z} - q^o(t, x - 1) = 0,$$

$$\psi^o(x) \frac{\partial F(x, a^o(x), u^o(x))}{\partial a(x)} - \psi^o(x - 1) + p^o(t_0, x) = 0. \quad (3.19)$$

Отсюда, принимая во внимание обозначения (3.18) и соотношения (3.15)-(3.17), будем иметь

$$p^o(t_1, x) = - \frac{\partial G(x, z^o(z(t_1, x)))}{\partial z},$$

$$q^o(t, x - 1) = \frac{\partial H(t, x, z^o(t, x), y^o(t, x), p^o(t, x), q^o(t, x))}{\partial y},$$

$$q(t, x_1 - 1) = - \frac{\partial Q(t, y(t, x_1))}{\partial y}, \quad (3.20)$$

$$\psi^o(x - 1) = \frac{\partial M(x, a^o(x), u^o(x))}{\partial a} + p^o(t_0, x),$$

$$\psi^o(x_1 - 1) = - \frac{\partial \varphi(a^o(x_1))}{\partial a}.$$

Далее предположим, что множество

$$F(x, a^o(x), U) = \{\alpha : \alpha = F(x, a^o(x), u), u \in U\} \quad (3.21)$$

выпуклое.

Тогда по схеме, изложенной, например, в [11, с.35-45], с учетом обозначений (3.18), из (3.14) получим, что

$$\psi^{o'}(x) F(x, a^o(x), u^o(x)) \geq \psi^{o'}(x) F(x, a^o(x), u)$$

для всех  $u \in U$ .

А это означает, что

$$\max_{u \in U} M(x, a^o(x), u, \psi^o(x)) = M(x, a^o(x), u^o(x), \psi^o(x)). \quad (3.22)$$

Сформулируем полученный результат.

**Теорема 3.2.** Если множество (3.21) выпукло, то для оптимальности допустимого управления  $u^o(x)$  в задаче (2.1)-(2.5) необходимо, чтобы соотношение (3.22) выполнялось для всех  $x \in X$ .

**4. Выводы.** В работе рассматривается задача оптимального управления одной гибридной системой типа Россера. Установлено достаточное условие оптимальности с помощью функций Беллмана-Кротова. Из него при некоторых дополнительных ограничениях выведен аналог дискретного условия максимума Понтрягина [9,10].

### Литература

1. Гайшун И.В. Многопараметрические системы управления. Минск. Наука и техника. 1996, 199 с.
2. Дымков М.П. Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления. Минск, БГЭУ, 2005, 363 с.
3. Фараджев Р.Г., Шапиро А.В. Оптимальные линейные двухпараметрические дискретные системы с квадратичными критерием качества // Автоматика и телемеханика. 1989, № 8, с. 64-74.
4. Джаббарова А.Я., Мансимов К.Б. Об одной дискретно-непрерывной задаче оптимального управления типа Россера // Вестник БГУ. Сер. физ.-мат. наук, 2013, № 4, с. 33-43.
5. Мансимов К.Б., Джаббарова А.Я. Необходимые условия оптимальности в одной гибридной системе типа Россера // Изв. НАН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и матем. наук, 2014, № 3.
6. Мансимов К.Б., Джаббарова А.Я. Исследование квазиособых управлений в дискретно-непрерывной задаче оптимального управления типа Россера // Вестник БГУ. Сер. физ.-мат. наук, 2014, № 4, с. 13-23.
7. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М. Наука, 1973, 386 с.
8. Кротов В.Ф. и др. Основы теории оптимального управления. М. Высшая школа. 1990, 430 с.
9. Понтрягин Л.С. и другие. Математическая теория оптимальных процессов. М. Наука, 1976, 384 с.
10. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск. Наука и техника. 1974, 272 с.
11. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Основы динамического программирования. Минск. Изд-во БГУ, 1975, 262 с.

UOT 517.9

A.Y. Cabbarova

#### Rosser tipli bir hibrid idarəetmə məsələsində optimallıq üçün Krotov tipli kafi şərt

*İşdə Rosser tipli bir hibrid optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün Krotov tipli kafi şərt alınmışdır. Bu kafi şərtədən baxılan məsələ üçün Pontryagin maksimum şərtinin analoqu alınmışdır.*

**Açar sözlər:** Rosser tipli sistem, optimallıq üçün kafi şərt, maksimum prinsipi, hibrid sistem

A.Y. Jabbarova

#### On Krotovs type sufficient optimality condition in Roesser type hybrid systems

*The paper considers one hybrid optimal control problem of the Roesser type. Krotov type sufficient condition is obtained.*

**Keywords:** Roesser type system, sufficient optimality condition, maximum principle, hybrid systems