Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXVI, No.3, 2016
www.icp.az/2016/3-08.pdf

УДК 518.2

Р.Т. АЛИЕВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПЕРВЫХ ЧЕТЫРЕХ МОМЕНТОВ ПРОЦЕССА СТРАХОВОГО РИСКА СПАРРЕ АНДЕРСЕНА

Рассматривается процесс страхового риска Спарре Андерсена. Получены асимптотические разложения для первых четырех моментов процесса при больших значениях t, а также получены асимптотические эквивалентности для дисперсии, коэффициента асимметрии и эксцесса процесса.

Ключевые слова: процесс страхового риска, асимптотические разложения, моменты, коэффициент асимметрии, эксцесс

1. *Введение.* Введем процесс страхового риска Спарре Андерсена

$$R_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} \eta_i \ , t \geq 0, \tag{1.1}$$

где R_t – капитал страховой компании в момент t; $u = R_0 > 0$ – начальный капитал страховой компании; $c > 0$ скорость поступлений в единицу времени премий; $\eta_1, \eta_2, \ldots -$ независимые и одинаково распределенные положительные случайные величины, означающие объемы индивидуальных исков. Считающий процесс $N_t = max\{k: \xi_1 + \cdots + \xi_k \leq t\}$ означает число требований до момента времени t, где $\xi_i, i \geq 1 -$ независимые и одинаково распределенные положительные случайные величины, которые означают время между требованиями.

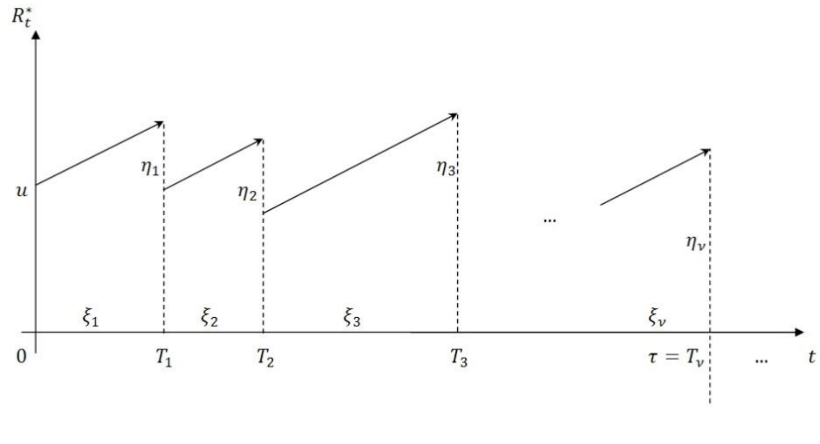

Рис. 1 Одна из реализаций процесса R_t

Обычно $\xi_i, i \geq 1$ имеют показательное распределение со средним $1/\lambda$, который эквивалентен тому, что N_t имеет распределение Пуассона с параметром λt. В случае, когда N_t является процессом Пуассона, в страховой литературе (1.1) называется классическим процессом риска или моделью Крамера-Лундберга. Но на практике предположение о том, что $\xi_i, i \geq 1$ имеют показательное распределение, т.е., что процесс поступления исков (требований) является пуассоновским процессом, оказывается нереалистичным. Поэтому в этой статье мы предположим, что $\xi_i, i \geq 1$ имеют произвольное распределение. В этом случае N_t будет процессом восстановления. В этом случае (1.1) называется процессом риска Спарре Андерсена.

2. Постановка задачи. Предположим, что $cE\xi_1 > E\eta_1$, т.е., чтобы разорение не произошло с вероятностью 1. Вероятность разорения для данного начального уровня капитала страховой компании и его свойства – классический объект исследования в теории риска [1; 2, с.25-32; 3, с.17-28; 4, с.5-23; 5; 7]. Нашей целью является получение асимптотических разложений для первых четырех моментов процесса при больших значениях t, а также для дисперсии, центральных моментов, коэффициента асимметрии и эксцесса процесса R_t.

3. Решение задачи.

Моменты k-го порядка $S_{N_t} = \sum_{i=1}^{N_t} \eta_i$, ξ_i и η_i обозначим, соответственно,

$$M_k(t) = E\left(S_{N_t}^k\right), t \geq 0; \mu_k = E\xi_i^k; m_k = E\eta_i^k, k = \overline{1,4}.$$

Из определения процесса (1.1) нетрудно получить формулы для четырех моментов процесса R_t:

$$E(R_t) = -M_1(t) + u + ct; \tag{3.1}$$

$$E(R_t^2) = M_2(t) - 2(u+ct)M_1(t) + (u+ct)^2; \tag{3.2}$$

$$E(R_t^3) = -M_3(t) + 3(u+ct)M_2(t) - 3(u+ct)^2 M_1(t) + (u+ct)^3; \tag{3.3}$$

$$E(R_t^4) = M_4(t) - 4(u+ct)M_3(t) + 6(u+ct)^2 M_2(t) - 4(u+ct)^3 M_1(t) + \\ +(u+ct)^4 + 6(u+ct)^2. \tag{3.4}$$

Теперь мы выразим моменты S_{N_t} посредством моментов случайной величины η_1 и процесса восстановления N_t.

Лемма 3.1. *Пусть* $\{\xi_n\}$ *и* $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$ *– две независимые последовательности положительных случайных величин, определенные на некотором вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$, *причем величины внутри каждой последовательности независимы и одинаково распределены. Кроме того,* $m_1 < c\mu_1$, *и* $m_4 = E\eta_1^4 < \infty$. *Тогда*

$$M_1(t) = m_1 E(N_t); \tag{3.5}$$

$$M_2(t) = m_1^2 E(N_t^2) + \sigma_\eta^2 E(N_t); \tag{3.6}$$

$$M_3(t) = m_1^3 E(N_t^3) + 3m_1\sigma_\eta^2 E(N_t^2) + (2m_1^3 - 3m_1 m_2 + m_3)E(N_t); \tag{3.7}$$

$$M_4(t) = m_1^4 E(N_t^2) + 6m_1^2\sigma_\eta^2 E(N_t^3) + (11m_1^4 - 18m_1^2 m_2 + 3m_2^2 + 4m_1 m_3)E(N_t^2) + \\ +(12m_1^2 m_2 - 6m_1^4 - 3m_2^2 - 4m_1 m_3 + m_4)E(N_t). \tag{3.8}$$

Доказательство. С этой целью введем производящие функции $\psi_\eta(z) = E\big(exp(z\eta_1)\big)$ и $\psi_{S_N}(z) = E\big(exp(zS_N)\big)$, где $N = N_t$ для краткости обозначения.

Так как $\{\eta_n\}, n \geq 1$ последовательность независимых и одинаково распределеных положительных случайных величин, не зависящих от $\xi_i, i \geq 1$ и N, то нетрудно видеть, что

$$E(\exp(zS_N)|N=n) = E(\exp(zS_n)|N=n) = E\big(exp(zS_n)\big) = \Big(\psi_\eta(z)\Big)^n$$

Поэтому

$$E(\exp(zS_N)|N) = \Big(\psi_\eta(z)\Big)^N.$$

Отсюда

$$\psi_{S_N}(z) = E\big(exp(zS_N)\big) = E\left(\psi_\eta(z)\right)^N. \tag{3.9}$$

Согласно свойствам производящей функции

$$M_k(t) = E\left(S_{N_t}^k\right) = \psi_{S_N}^{(k)}(z)|_{z=0}, k = 1,2, \dots \quad (3.10)$$

$$M_1(t) = E\left(S_{N_t}\right) = \psi'_{S_N}(z)|_{z=0}. \quad (3.11)$$

С другой стороны, из (3.9), имеем:

$$\psi'_{S_N}(z) = \left(E\left(\psi_\eta(z)\right)^N\right)' = E\left(N\left(\psi_\eta(z)\right)^{N-1}\psi'_\eta(z)\right). \quad (3.12)$$

Подставляя (3.12) в (3.11), получаем (3.5):

$$M_1(t) = \psi'_{S_N}(z)|_{z=0} = E\left(N\left(\psi_\eta(0)\right)^{N-1}\psi'_\eta(0)\right) = E\eta_1 EN = m_1 EN.$$

Теперь получим второй момент S_{N_t}. С этой целью нужно получить вторую производную от $\psi_{S_N}(z)$:

$$\psi''_{S_N}(z) = E\left(N(N-1)\left(\psi_\eta(z)\right)^{N-2}\left(\psi'_\eta(z)\right)^2 + N\left(\psi_\eta(z)\right)^{N-1}\psi''_\eta(z)\right). \quad (3.13)$$

Из (3.11) и (3.13) получаем (3.6):

$$M_2(t) = E\left(S_{N_t}^2\right) = \psi''_{S_N}(z)|_{z=0} = E(N(N-1)(E\eta_1)^2 + NE\eta_1^2) =$$
$$= EN^2(E\eta_1)^2 - EN(E\eta_1)^2 + ENE\eta_1^2 =$$
$$= EN^2(E\eta_1)^2 + ENvar(\eta_1) =$$
$$= m_1^2 E(N^2) + \sigma_\eta^2 E(N).$$

Теперь получим третий момент S_{N_t}. С этой целью нужно получить третью производную от $\psi_{S_N}(z)$, из формулы (3.9):

$$\psi'''_{S_N}(z) = E\left(N(N-1)(N-2)\left(\psi_\eta(z)\right)^{N-3}\left(\psi'_\eta(z)\right)^3 +\right.$$
$$\left. +3N(N-1)\left(\psi_\eta(z)\right)^{N-2}\psi'_\eta(z)\psi''_\eta(z) + N\left(\psi_\eta(z)\right)^{N-1}\psi'''_\eta(z)\right). \quad (3.14)$$

Из (3.10) и (3.14) получаем (3.7):

$$M_3(t) = E\left(S_{N_t}^3\right) = \psi'''_{S_N}(z)|_{z=0} = E(N(N-1)(N-2)(E\eta_1)^3 + 3N(N-1)E\eta_1 E\eta_1^2 + NE\eta_1^3) =$$
$$= m_1^3 E(N^3) + 3m_1\sigma_\eta^2 E(N^2) + (2m_1^3 - 3m_1 m_2 + m_3)E(N).$$

Формула (3.8) получается аналогичным способом.

Этим завершается доказательство леммы 3.1.

Замечание. Формулы (3.5) и (3.6) можно получить также из тождества Вальда [6, с.673].

Как видно, формулы (3.5) и (3.8) содержат моменты процесса восстановления N_t. Поэтому, для получения в следующем разделе асимптотических разложений, целесообразно получит преобразование Лапласа моментов процесса восстановления N_t.

Введем следующие преобразования:

$$\tilde{E}N_\lambda^k = \int_0^\infty e^{-\lambda t} E\left(N_t^k\right)dt, k = \overline{1,4}, \varphi_\xi(\lambda) = E\left(e^{-\lambda\xi_1}\right), \lambda > 0, 0 < \varphi_\xi(\lambda) < 1.$$

Лемма 3.2. *Пусть выполняются условия леммы 3.1. Тогда преобразование Лапласа первых четырех моментов процесса восстановления N_t имеют следующий вид:*

$$\tilde{E}N_\lambda = \frac{\varphi_\xi(\lambda)}{\lambda\left(1-\varphi_\xi(\lambda)\right)}; \tag{3.15}$$

$$\tilde{E}N_\lambda^2 = \frac{\varphi_\xi(\lambda)}{\lambda}\left(\frac{2}{\left(1-\varphi_\xi(\lambda)\right)^2} - \frac{1}{1-\varphi_\xi(\lambda)}\right); \tag{3.16}$$

$$\tilde{E}N_\lambda^3 = \frac{\varphi_\xi(\lambda)}{\lambda}\left(\frac{6}{\left(1-\varphi_\xi(\lambda)\right)^3} - \frac{6}{\left(1-\varphi_\xi(\lambda)\right)^2} + \frac{1}{1-\varphi_\xi(\lambda)}\right); \tag{3.17}$$

$$\tilde{E}N_\lambda^4 = \frac{\varphi_\xi(\lambda)}{\lambda}\left(\frac{24}{\left(1-\varphi_\xi(\lambda)\right)^4} - \frac{36}{\left(1-\varphi_\xi(\lambda)\right)^3} + \frac{14}{\left(1-\varphi_\xi(\lambda)\right)^2} - \frac{1}{1-\varphi_\xi(\lambda)}\right). \tag{3.18}$$

Доказательство. По определению N_t

$$P\{N_t = n\} = P\{T_n \le t < T_{n+1}\} = \Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t).$$

Поэтому,

$$E(N_t) = \sum_{n=0}^{\infty} nP\{N_t = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)\right). \tag{3.19}$$

Применяя преобразование Лапласа в (3.19), имеем:

$$\tilde{E}N_\lambda = \frac{1-\varphi_\xi(\lambda)}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty} n\varphi_\xi^n(\lambda) = \frac{\varphi_\xi(\lambda)}{\lambda\left(1-\varphi_\xi(\lambda)\right)}. \tag{3.20}$$

Аналогично,

$$E(N_t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2\left(\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)\right). \tag{3.21}$$

Применяя преобразование Лапласа в (3.21), имеем:

$$\tilde{E}N_\lambda^2 = \frac{1-\varphi_\xi(\lambda)}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\varphi_\xi^n(\lambda) = \frac{\varphi_\xi(\lambda)\left(1-\varphi_\xi(\lambda)\right)}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\varphi_\xi^{n-1}(\lambda). \tag{3.22}$$

С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\varphi_\xi^{n-1}(\lambda) = \frac{2}{\left(1-\varphi_\xi(\lambda)\right)^3} - \frac{1}{\left(1-\varphi_\xi(\lambda)\right)^2}.$$

Поэтому, получаем (3.16).

Формулы (3.17) и (3.18) получаются похожим способом.

Этим лемма 3.2 доказана.

Лемма 3.3. *Пусть выполняются условия леммы 3.1 и* $\mu_2 = E\xi_1^2 < \infty$. *Тогда имеют место следующие асимптотические разложения для первых четырех моментов процесса* N_t *при* $t \to \infty$*:*

$$E(N_t) = \frac{t}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} - 1 + o(1); \tag{3.23}$$

$$E(N_t^2) = \frac{t^2}{\mu_1^2} + \left(\frac{2\mu_2}{\mu_1^3} - \frac{3}{\mu_1}\right)t + o(1); \tag{3.24}$$

$$E(N_t^3) = \frac{t^3}{\mu_1^3} + \left(\frac{9\mu_2}{2\mu_1^4} - \frac{6}{\mu_1^2}\right)t^2 + o(t^2); \tag{3.25}$$

$$E(N_t^4) = \frac{t^4}{\mu_1^4} + \left(\frac{8\mu_2}{\mu_1^5} - \frac{10}{\mu_1^3}\right)t^3 + o(t^3). \tag{3.26}$$

Доказательство. Асимптотические разложения (3.23) и (3.24) известны из теории восстановления [6, с.257]. Для доказательства (3.25) и (3.26) разложим функцию $\varphi_\xi(\lambda) = E(exp(-\lambda\xi_1))$ при $\lambda \to 0$ в ряд Тейлора:

$$\varphi_\xi(\lambda) = E\left(e^{-\lambda\xi_1}\right) = 1 - \lambda E(\xi_1) + \frac{\lambda^2}{2!}E(\xi_1^2) + o(\lambda^2). \tag{3.27}$$

Из (3.27) при $\lambda \to 0$, имеем:

$$\left(1 - \varphi_\xi(\lambda)\right)^{-k} = \frac{1}{(\lambda\mu_1)^k}\left(1 + \frac{k\mu_2}{2\mu_1}\lambda + o(\lambda)\right), k = \overline{1,5}. \tag{3.28}$$

Подставляя асимптотические разложения (3.28) в формулы (3.18)-(3.19) и применяя теоремы Таубера [6, с.442] можем получить (3.23)-(3.26).

Этим лемма 3.3 доказана.

Используя леммы 3.1 и 3.3 мы можем получить асимптотические разложения для первых четырех моментов $M_k(t) \equiv E\left(S_{N_t}^k\right), k = \overline{1,4}$, процесса S_{N_t}.

Лемма 3.4. *Пусть выполняются условия леммы 3.1 и* $\mu_2 = E\xi_1^2 < \infty$. *Тогда имеют место следующие асимптотические разложения для первых четырех моментов процесса* S_{N_t} *при* $t \to \infty$:

$$M_1(t) = \frac{m_1}{\mu_1}t + \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1^2} - 1\right)m_1 + o(1); \tag{3.29}$$

$$M_2(t) = \frac{m_1^2}{\mu_1^2}t^2 + \left(\frac{\sigma_\eta^2}{\mu_1} + \frac{2\sigma_\xi^2 - \mu_1^2}{\mu_1^3}m_1^2\right)t + o(t); \tag{3.30}$$

$$M_3(t) = \frac{m_1^3}{\mu_1^3}t^3 + \left(\frac{3\sigma_\eta^2}{\mu_1^2}m_1 + \frac{9\sigma_\xi^2 - 3\mu_1^2}{2\mu_1^4}m_1^3\right)t^2 + o(t^2); \tag{3.31}$$

$$M_4(t) = \frac{m_1^4}{\mu_1^4}t^4 + \left(\frac{6\sigma_\eta^2}{\mu_1^3}m_1^2 + \frac{8\sigma_\xi^2 - 2\mu_1^2}{\mu_1^5}m_1^4\right)t^3 + o(t^3). \tag{3.32}$$

Доказательство. Подставляя асимптотические разложения (3.23)-(3.26) в формулах (3.5)-(3.8) можем получить (3.29)-(3.32).

Теперь мы можем сформулировать основной результат этого параграфа в виде следующей теоремы:

Теорема 3.1. *Пусть выполняются условия леммы 2.1 и* $\mu_2 = E\xi_1^2 < \infty$. *Тогда имеют место следующие асимптотические разложения для первых четырех моментов процесса* R_t *при* $t \to \infty$:

$$E(R_t) = \left(c - \frac{m_1}{\mu_1}\right)t + A_1 + o(1); \tag{3.33}$$

$$E(R_t^2) = \left(c - \frac{m_1}{\mu_1}\right)^2 t^2 + A_2 t + o(t); \tag{3.34}$$

$$E(R_t^3) = \left(c - \frac{m_1}{\mu_1}\right)^3 t^3 + A_3 t^2 + o(t^2); \qquad (3.35)$$

$$E(R_t^4) = \left(c - \frac{m_1}{\mu_1}\right)^4 t^4 + A_4 t^3 + o(t^3). \qquad (3.36)$$

где

$$A_1 = u - \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1^2} - 1\right) m_1;$$

$$A_2 = \left(c - \frac{m_1}{\mu_1}\right)(2u + m_1) + \frac{1}{\mu_1}\sigma_\eta^2 + \left(\frac{2m_1^2}{\mu_1^3} - \frac{cm_1}{\mu_1^2}\right)\sigma_\xi^2.$$

$$A_3 = \frac{3}{2}\left(c - \frac{m_1}{\mu_1}\right)^2 (2u + m_1) + \left(\frac{3c}{\mu_1} - \frac{3m_1}{\mu_1^2}\right)\sigma_\eta^2 + \left(\frac{6cm_1^2}{\mu_1^3} - \frac{9m_1^3}{2\mu_1^4} + \frac{3c^2 m_1}{2\mu_1^2}\right)\sigma_\xi^2;$$

$$A_4 = 2\left(c - \frac{m_1}{\mu_1}\right)^3 (2u + m_1) + \left(\frac{6m_1^2}{\mu_1^3} - \frac{12cm_1}{\mu_1^2} + \frac{6c^2}{\mu_1}\right)\sigma_\eta^2 +$$
$$+ \left(\frac{8m_1^4}{\mu_1^5} - \frac{18cm_1^3}{\mu_1^4} + \frac{12c^2}{\mu_1^3} - \frac{2cm_1}{\mu_1^2}\right)\sigma_\xi^2.$$

Доказательство. Учитывая асимптотическое разложение (3.27) в (3.1) мы получаем (3.33). Подставляя асимптотические разложения (3.29) и (3.30) в формуле (3.2) имеем:

$$E(R_t^2) = \frac{m_1^2}{\mu_1^2} t^2 + \left(\frac{\sigma_\eta^2}{\mu_1} + \frac{2\sigma_\xi^2 - \mu_1^2}{\mu_1^3} m_1^2\right) t + o(t)$$
$$-2(u + ct)\left(\frac{m_1}{\mu_1} t + \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1^2} - 1\right) m_1 + o(1)\right) + (u + ct)^2 =$$
$$= \left(c - \frac{m_1}{\mu_1}\right)^2 t^2 + \left(\left(c - \frac{m_1}{\mu_1}\right)(2u + m_1) + \frac{1}{\mu_1}\sigma_\eta^2 + \left(\frac{2m_1^2}{\mu_1^3} - \frac{cm_1}{\mu_1^2}\right)\sigma_\xi^2\right) t + o(t).$$

Следовательно, получаем (3.34).

Подставляя асимптотические разложения (3.29)-(3.30) в формуле (3.3) после некоторых вычислений можем получить (3.35). Наконец, учитывая (3.29)-(3.30) в формуле (3.4) после соответствующих вычислений мы можем получить (3.36).

Этим завершается доказательство теоремы 3.1.

Таким образом, мы получили асимптотические разложения для первых четырех моментов процесса R_t. Используя эти моменты, можно вычислить дисперсию процесса R_t:

Следствие 3.1. *Пусть выполняются условия теоремы 3.1. Тогда имеет место следующая асимптотическая эквивалентность для дисперсии процесса R_t при $t \to \infty$:*

$$var(R_t) \sim B_1 t, \qquad (3.37)$$

где $B_1 = A_2 - 2A_1\left(c - \frac{m_1}{\mu_1}\right)$ и $f(t) \sim g(t)$ означает, что $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$.

Используя теорему 3.1, мы можем сформулировать следующую теорему:

Теорема 3.2. *Пусть выполняются условия теоремы 3.1. Тогда имеют место следующие асимптотические разложения для центральных моментов $\alpha_3(t)$ и $\alpha_4(t)$ процесса R_t при $t \to \infty$:*

$$\alpha_3(t) = B_2 t^2 + \left(6\left(c - \frac{m_1}{\mu_1}\right)^2 + A_1 A_2\right) t + o(t); \qquad (3.38)$$

$$\alpha_4(t) = B_3 t^3 + o(t^3). \quad (3.39)$$

$$B_2 = 3A_1\left(c - \frac{m_1}{\mu_1}\right)^2 - 3A_2\left(c - \frac{m_1}{\mu_1}\right) + A_3;$$

$$B_3 = 2\left(c - \frac{m_1}{\mu_1}\right)^3 + 6A_2\left(c - \frac{m_1}{\mu_1}\right)^2 - 4A_3\left(c - \frac{m_1}{\mu_1}\right) + A_4.$$

Доказательство. По определению центрального момента третьего порядка процесса R_t:

$$\alpha_3(t) \equiv E\big(R_t - E(R_t)\big)^3 = E(R_t^3) - 3E(R_t^2)E(R_t) + 2\big(E(R_t)\big)^3. \quad (3.40)$$

Подставляя асимптотические разложения (3.33), (3.34) и (3.35) в формуле (3.40) после соответсвующих вычислений можем получить (3.38).

Аналогично, по определению центрального момента четвертого порядка процесса R_t:

$$\alpha_4(t) \equiv E\Big(R(t) - E\big(R(t)\big)\Big)^4 =$$
$$= E(R_t^4) - 4E(R_t^3)E(R_t) + 6E(R_t^2)\big(E(\,R_t)\big)^2 - 3\big(E(R_t)\big)^4. \quad (3.41)$$

Подставляя асимптотические разложения (3.33)–(3.36) в формуле (3.41) после соответсвующих вычислений можем получить (3.39).

Используя разложения для дисперсии и центральных моментов $\alpha_3(t)$ и $\alpha_4(t)$ можно вычислить коэффициента асимметрии $(\gamma_3(t))$ и эксцесс $(\gamma_4(t))$ процесса R_t:

Следствие 3.2. *Пусть выполняются условия теоремы 3.1. Тогда имеют место следующие асимптотические эквивалентности для коэффициента асимметрии и эксцесса процесса* R_t *при* $t \to \infty$:

$$\gamma_3(t) \sim \frac{B_2}{B_1^{3/2}}\sqrt{t}; \quad (3.42)$$

$$\gamma_4(t) \sim \frac{B_3}{B_1^2}t. \quad (3.43)$$

Доказательство. По определению

$$\gamma_3(t) = \frac{\alpha_3(t)}{\sigma_R^3(t)}. \quad (3.44)$$

С другой стороны, из следствия 3.1 при $t \to \infty$ имеем:

$$\sigma_R(t) \equiv \sqrt{var\big(R(t)\big)} \sim (B_1 t)^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому,

$$\sigma_R^3(t) \sim (B_1 t)^{\frac{3}{2}}. \quad (3.45)$$

Используя (3.40) и (3.45) получаем (3.42). Соотношение асимптотической эквивалентности (3.43) для $\gamma_4(t) = \frac{\alpha_4(t)}{\sigma_R^4(t)}$ получается аналогичным способом.

4. Заключение. В данной статье получены асимптотические разложения для первых четырех моментов процесса страхового риска при больших значениях t. А также получены асимптотические эквивалентности для дисперсии, коэффициента асимметрии и эксцесса процесса. Эти разложения дают возможность исследовать изменение уровня капитала страховой компании в стационарном режиме.

Литература

1. Aliyev R.T., Jafarova V. On the moments of the Sparre Anderson surplus process and it's average value / 13th International Congress on Insurance: Mathematics and Economics 26-29 May 2009, Istanbul, Turkey, p.39.
2. Asmussen S. Ruin Probabilities. World Scientific, 2000.
3. Dickson D. Insurance Risk and Ruin. Cambridge University Press, 2005, 229 p.
4. Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M. Modern actuarial risk theory using R. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008, 381 p.
5. Gerber, H.U., Shiu, E.S.W. Discussion of Y. Cheng and Q. Tang's Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin in the Erlang(2) risk process // North American Actuarial Journal, 2003, 7 (3), pp.117–119.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. т.2, М., Мир, 1971,752 с.
7. Lin, X., Willmot, G.E. The moments of the time of ruin, the surplus before ruin, and the deficit at ruin. Insurance: Mathematics and Economics, 2000, 27, pp.19–44.

UOT 518.2

R.T. Əliyev

Sparre Andersen sığorta risk prosesinin ilk dörd momenti üçün asimptotik ayrilişlar

Sparre Andersen sığorta risk prosesi tədqiq olunmuşdur. Prosesin ilk dörd momenti üçün asimptotik ayrılışlar əldə edilmiş, həmçinin, dispersiya, asimmetriya əmsalı və ekssesi üçün asimptotik ekvivalentliklər alınmışdır.
Açar sözlər: sığorta risk prosesi, asimptotik ayrlış, momentlər, asimmetriya əmsalı, eksses

R.T. Aliyev

Asymptotic expansions for the first four moments of the Sparre Andersen insurance risk process

The Sparre Andersen insurance risk process is considered. The asymptotic expansions for the first four moments of this process at large t and asymptotic equivalence for the variance, skewness and kurtosis of the process are derived.
Keywords: insurance risk process, asymptotic expansion, moments, skewness, kurtosis

Институт Систем Управления НАН Азербайджана
Бакинский Государственный Университет
Представлено 25.12.2015