Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXVI, No.6, 2016
www.icp.az/2016/6-01.pdf

УДК 519.852.6

К.Ш. МАМЕДОВ, Н.О. МАМЕДЛИ

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ СУБОПТИМИСТИЧЕСКОГО И СУБПЕССИМИСТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЙ ЧАСТИЧНО-БУЛЕВОЙ ЗАДАЧИ О РАНЦЕ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

В работе введены понятия оптимистического, пессимистического, субоптимистического и субпессимистического решений для частично-Булевой задачи о ранце с интервальными исходными данными. Для этой задачи разработаны методы построения субоптимистического и субпессимистического решений. Эти методы основаны на некоторой экономической интерпретации рассмотренной задачи. Проведённые многочисленные эксперименты над различными задачами большой размерности со случайными коэффициентами еще раз показывают высокую эффективность разработанных методов.

Ключевые слова: частично-Булевая задача о ранце с интервальными данными, оптимистическое, пессимистическое, субоптимистическое и субпессимистическое решения, верхняя и нижняя границы, вычислительные эксперименты

1. *Введение.* Рассматривается следующая задача

$$\sum_{j=1}^{N}[\underline{c}_j,\overline{c}_j]x_j \to max, \tag{1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{N}[\underline{a}_j,\overline{a}_j]x_j \leq [\underline{b},\overline{b}], \tag{1.2}$$

$$0 \leq x_j \leq 1, \left(j=\overline{1,N}\right), \tag{1.3}$$

$$x_j = 1 \vee 0, \left(j=\overline{1,n}\right)\ (n \leq N). \tag{1.4}$$

Здесь предполагается, что $\underline{c}_j > 0$, $\overline{c}_j > 0$, $\underline{a}_j > 0$, $\overline{a}_j > 0$ $\left(j=\overline{1,N}\right)$, $\underline{b} > 0$, $\overline{b} > 0$ и целые. Задача (1.1)-(1.4) является обобщением задачи о ранце, интервальной задачи о ранце и задачи линейного программирования с одним ограничением: в случае $n=0$ все переменные будут принимать непрерывные значения, т.е. получается интервальная задача линейного программирования с одним ограничением. А если $n=N$, то получается известная интервальная задача о ранце. Отметим, что в частном случае, если $\underline{c}_j=\overline{c}_j$, $\underline{a}_j=\overline{a}_j$ $\left(j=\overline{1,N}\right)$ и $\underline{b}=\overline{b}$, то получается известная задача частично-Булевого программирования с одним ограничением.

Поскольку вышеперечисленные частные случаи задачи (1.1)-(1.4) являются NP-полными, т.е. труднорешаемыми, то рассмотренная в данной работе задача также входит в класс NP-полных. Заметим, что для задач входящих в класс NP-полных не существуют методы нахождения оптимального решения с полиномиальной сложности [1. с.123]. Все известные методы “типа ветвей и границ”, “динамического программирования”, “комбинаторного типа”, и т.д. решают задачи лишь небольшой размерности за реальное время [1,2. с.56-58, с.78]. С другой стороны в конкретных прикладных задачах число неизвестных и ограничений бывают большими, поэтому для решения таких практических задач разработаны различные алгоритмы построения субоптимальных (приближённых) решений [3-8] и др.

Отметим, что различные классы рассмотренных задач с интервальными данными исследованы и разработаны некоторые алгоритмы решения в работах [9-15] и др.

В данной работе, в отличие от выше перечисленных задач, рассмотрена более общая задача, а именно частично-Булевая задача с интервальными данными. Насколько нам известно, такая задача, когда только часть переменных принимают Булевые значения не рассмотрены. В данной работе введены понятия оптимистическое, пессимистическое, субоптимистическое и субпессимистическое решения задачи (1.1)-(1.4) и разработаны алгоритмы построения субоптисмистического и субпессимистического решений.

2. Постановка задачи. В начале для задач (1.1)-(1.4) зададим некоторую экономическую интерпретацию. Пусть имеются N объектов. Из каждых $n\,(n \le N)$ объектов можно использовать либо игнорировать, а для остальных $N-n$ объектов можно использовать некоторой степени. Если j-ый объект $\left(j=\overline{1,N}\right)$ выбирается для использования (или частичного использования), то возможные затраты входят в интервал $\left[\underline{a}_j, \overline{a}_j\right]$, при этом прибыль принадлежит интервалу $\left[\underline{c}_j, \overline{c}_j\right]\left(j=\overline{1,N}\right)$. Допустим, что для использования этих объектов выделен ресурс, входящий в интервал $[\underline{b}, \overline{b}]$. Требуется выбирать для использования (или частичного использования) такие объекты, суммарные затраты которых не превышали выделенных ресурсов, входящих в интервал $[\underline{b}, \overline{b}]$, а общая прибыль была максимальной. Очевидно, что, принимая переменных $x_j\left(j=\overline{1,N}\right)$, где $x_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-ый объект выбирается,} \\ 0, & \text{в противном случае } \left(j=\overline{1,n}\right) \end{cases}$
и $0 \le x_j \le 1 \left(j=\overline{n+1,N}\right)$, то математический модель задачи будет в виде (1.1)-(1.4). Теперь введём некоторые понятия, которые в дальнейшем будем использовать.

Определение 1. Допустимым решением задачи (1.1)-(1.4) будем называть N-мерный вектор $X=(x_1,\dots,x_N)$, который удовлетворяет системе ограничений (1.2)-(1.4) для $\forall\, a_j \in [\underline{a}_j, \overline{a}_j]\left(j=\overline{1,N}\right)$ и $\forall b \in [\underline{b}, \overline{b}]$.

Из этого определения непосредственно следует, что понятия оптимального решения и оптимального значения функции (1.1) должны иметь другой смысл в отличие от известных. Потому, что не превышение суммы некоторых интервалов от заданного конкретного интервала $[\underline{b}, \overline{b}]$ и при этом максимальность суммы некоторых интервалов необходимо обеспечивать. С этой целью введём ещё несколько следующих определений.

Определение 2. Допустимое решение $X^{op}=\left(x_1^{op}, x_2^{op}, \dots, x_N^{op}\right)$ задачи (1.1)-(1.4) назовём оптимистическим, если удовлетворяется неравенство $\sum_{j=1}^{N} \underline{a}_j x_j^{op} \le b$, $\left(b \in \left[\underline{b}, \overline{b}\right]\right)$ и при этом значение функции $f^{op}=\sum_{j=1}^{N} \overline{c}_j x_j^{op}$ будет максимальным.

Определение 3. Допустимое решение $X^{p}=\left(x_1^{p}, x_2^{p}, \dots, x_N^{p}\right)$ задачи (1.1)-(1.4) назовём пессимистическим, если удовлетворяется соотношение $\sum_{j=1}^{N} \overline{a}_j x_j^{p} \le b$, $\left(b \in \left[\underline{b}, \overline{b}\right]\right)$ и при этом значение функции $f^{p}=\sum_{j=1}^{N} \underline{c}_j x_j^{p}$ будет максимальным.

Из этих определений видно, что для нахождения оптимистического и пессимистического решений задачи (1.1)-(1.4) необходимо решить некоторую задачу о ранце, которая входит в класс NP-полных. Поэтому мы ввели следующие понятия субоптимистического и субпессимистического решений задачи (1.1)-(1.4) и разработали алгоритм их нахождения.

Определение 4. Допустимое решение $X^{so}=\left(x_1^{so}, x_2^{so}, \dots, x_N^{so}\right)$ задачи (1.1)-(1.4) назовём субоптимистическим, если удовлетворяется $\sum_{j=1}^{N} \underline{a}_j x_j^{so} \le b$, $\left(b \in \left[\underline{b}, \overline{b}\right]\right)$ и при этом значение функции $f^{so}=\sum_{j=1}^{N} \overline{c}_j x_j^{so}$ будет принимать большое значение.

Определение 5. Допустимое решение $X^{sp} = \left(x_1^{sp}, x_2^{sp}, \dots, x_N^{sp}\right)$ задачи (1.1)-(1.4) назовём субпессимистическим, если удовлетворяется соотношение $\sum_{j=1}^{N} \overline{a}_j x_j^{sp} \le b$ $(b \in [\underline{b}, \overline{b}])$ и при этом значение функции $f^{sp} = \sum_{j=1}^{N} \underline{c}_j x_j^{sp}$ будет принимать большое значение.

3. Теоретическое обоснование метода. Исходя из вышеуказанной экономической интерпретации, представленной в пункте 2, если j-ый объект $\left(j = \overline{1, N}\right)$ выбирается для использования, то требуются расходы, входящие в интервал $[\underline{a}_j, \overline{a}_j]$, $\left(j = \overline{1, N}\right)$. При этом полученная прибыль должна входить в заданный интервал $[\underline{c}_j, \overline{c}_j]$ $\left(j = \overline{1, N}\right)$. Отсюда видно, что прибыль на каждую единицу расхода, входящая в интервал $[\underline{a}_j, \overline{a}_j]$, будет составлять $\left([\underline{c}_j, \overline{c}_j]\right)/[\underline{a}_j, \overline{a}_j]$. Очевидно, что необходимо выбирать такой объект с номером j_*, в котором отношение $\left([\underline{c}_{j_*}, \overline{c}_{j_*}]\right)/[\underline{a}_{j_*}, \overline{a}_{j_*}]$ будет максимальным. Другими словами, номер j_* определяется из следующей формулы:

$$\max_j \frac{[\underline{c}_j, \overline{c}_j]}{[\underline{a}_j, \overline{a}_j]} = \max_j \frac{\overline{c}_j}{\underline{a}_j} = \frac{\overline{c}_{j_*}}{\underline{a}_{j_*}} \text{ или } j_* = arg \max_j \frac{\overline{c}_j}{\underline{a}_j} \qquad (3.1)$$

Из формулы (3.1) непосредственно получается, что выбранный объект j_* соответствует оптимистической стратегии (см. определение 2). Аналогично, можно вывести критерии выбора объекта j_* для пессимистической стратегии (см. определение 3) следующим образом:

$$j_* = arg \max_j (\underline{c}_j / \overline{a}_j) \qquad (3.2)$$

Необходимо заметить, что формулы (3.1) или (3.2) можно принимать как в качестве критерия выбора неизвестных x_j для построения субоптимистического или субпессимистического решений соответственно. При этом необходимо учитывать случай, в какой интервал входит найденный номер j_*, т.е. $j_* \in [1, \dots, n]$ или $j_* \in [n+1, n+2, \dots, N]$.

Пусть $T = \{1, 2, \dots, n\}$ и $R = \{n+1, n+2, \dots, N\}$. В начале процесса построения решений принимаем $X^{so} = (0, 0, \dots, 0)$ или $X^{sp} = (0, 0, \dots, 0)$ и рассмотрим 2 случая:

1. Пусть $j_* \in T$. Тогда x_{j_*} может принимать значения 0 или 1. Если $\underline{a}_{j_*} \le b$, то принимаем $x_{j_*} := 1$, $b := b - \underline{a}_{j_*}$, $T := T \backslash \{j_*\}$, а если $\underline{a}_{j_*} > b$, то принимаем $x_{j_*} := 0$, $T := T \backslash \{j_*\}$.

2. Пусть $j_* \in T$. Тогда неизвестный x_{j_*} должен принимать любые значения из интервала $[0; 1]$ (см. ограничение (1.3)). При этом если $\underline{a}_{j_*} \le b$, то принимаем $x_{j_*} := 1$, $b := b - \underline{a}_{j_*}$, $R := R \backslash \{j_*\}$, а если $\underline{a}_{j_*} > b$, то принимаем $x_{j_*} := b / \underline{a}_{j_*}$, $R := R \backslash \{j_*\}$, $b := b - \underline{a}_{j_*} x_{j_*}$. Ясно, что в этом случае $b = 0$ и на этом процесс решения завершается.

Для продолжения процесса построения субоптимистического решения $X^{so} = (x_1^{so}, x_2^{so}, \dots, x_N^{so})$ находим номер j_* из критерия

$$j_* = arg \max_j (\overline{c}_j / \underline{a}_j).$$

Процесс построения субоптимистического решения завершается, если $T = \emptyset$ и $R = \emptyset$, т.е. все переменные рассмотрены.

Отметим, что аналогично вышеуказанному, можно построить субпессимистическое решение $X^{sp} = \left(x_1^{sp}, x_2^{sp}, \dots, x_N^{sp}\right)$ задачи (1.1)-(1.4) используя критерий

$$j_* = arg \max_j (\underline{c}_j / \overline{a}_j).$$

Теперь напишем алгоритм вышеуказанного процесса построения субоптимистического решения (аналогично можно написать алгоритм построения субпессимистического решения).

Алгоритм

Шаг 1.Ввод $N, n, \underline{a}_j, \overline{a}_j, \underline{c}_j, \overline{c}_{j,}(j = \overline{1, N}), \underline{b}, \ \overline{b}$.
Шаг 2. Принять $b := \overline{b}, x_j^{so} := 0$, и множества $T = \{1,2, \ldots, n\}$, $R = \{n+1, n+2, \ldots, N\}$.
Шаг 3. Вычислить $k_j^{so} = \overline{c}_j / \underline{a}_j$, $(j \in T \cup R)$.
Шаг 4. Найти номер j_* из критерия

$$j_* = arg \max_{j \in T \cup R} (\overline{c}_j / \underline{a}_j).$$

Шаг 5. Если $j_* \in T$ и $\underline{a}_{j_*} \leq \overline{b}$, то принять $x_{j_*}^{so} := 1, \overline{b} := \overline{b} - \underline{a}_{j_*}, T := T \backslash \{j_*\}$ и переход к шагу 3.
Шаг 6. Если $j_* \in T$ и $\underline{a}_{j_*} > \overline{b}$, то принять $x_{j_*}^{so} := 0, T := T \backslash \{j_*\}$ и переход к шагу 3.
Шаг 7.Если $j_* \in R$ и $\underline{a}_{j_*} \leq \overline{b}$, то принять $x_{j_*}^{so} := 1, \overline{b} := \overline{b} - \underline{a}_{j_*}$, $R := R \backslash \{j_*\}$и переход к шагу 3.
Шаг 8. Если $j_* \in R$ и $\underline{a}_{j_*} > \overline{b}$, то принять $x_{j_*}^{so} := (\overline{b} / \underline{a}_{j_*})$, $R := R \backslash \{j_*\}$.
Шаг 9. Вычислить $f^{so} := \sum_{j=1}^{N} \overline{c}_j x_j^{so}$.
Шаг 10.Печать $f^{so}, x^{so} = (x_1^{so}, x_2^{so}, \ldots, x_N^{so})$.
Шаг 11. Конец.

Отметим, что в книге [16, стр.15-17] введены понятия операций над интервалами следующим образом. Пусть заданы интервалы $A = [a_1, a_2]$ и $B = [b_1, b_2]$.
1. $A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$,
2. $A - B = [a_1 - b_2, a_2 - b_1] = A + [-1, -1] * B$,
3. $A * B = [\min\{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}, max\{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}]$, (3.3)
4. $A : B = [a_1, a_2] * [1/b_2, 1/b_1]$. (3.4)

Отсюда видно, что для нахождения отношения интервалов нужно выполнить операции:

$$A : B = [a_1, a_2] * [1/b_2, 1/b_1] = \left[\min\left\{\frac{a_1}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_2}{b_1}\right\}, max\left\{\frac{a_1}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_2}{b_1}\right\} \right].$$

Теорема 1. Пусть заданы интервалы $A = [a_1, a_2]$ и $B = [b_1, b_2]$. Если $0 < a_1 \leq a_2$, $0 < b_1 \leq b_2$, то $\min(a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2) = a_1 b_1$, $\max(a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2) = a_2 b_2$.

Доказательство. По условию $a_1 \leq a_2$ и $b_1 \leq b_2$. Поскольку $b_1 > 0$ и $b_2 > 0$ получим, что $a_1 b_1 \leq a_2 b_1$ и $a_1 b_1 \leq a_1 b_2$**.** С другой стороны умножая следующую систему неравенств по частям $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \\ b_1 \leq b_2 \end{cases}$, получаем $a_1 b_1 \leq a_2 b_2$. Следовательно, $\min(a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2) = a_1 b_1$
Аналогичным образом доказывается, что $\max(a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2) = a_2 b_2$.
Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть заданы интервалы $A = [a_1, a_2]$ и $B = [b_1, b_2]$. Если $0 < a_1 \leq a_2$, $0 < b_1 \leq b_2$, то $\min(a_1/b_2, a_1/b_1, a_2/b_2, a_2/b_1) = a_1/b_2$, $\max(a_1/b_2, a_1/b_1, a_2/b_2, a_2/b_1) = a_2 b_2$. Таким образом $A : B = [a_1/b_2, a_2/b_1]$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2.

Доказанные нами теоремы 1 и 2 показывают, что произведение и отношение двух интервалов, указанные в (3.3)-(3.4) можно получить используя меньших арифметических и логических операций.

Преимущества этих теорем от приведённых в книге [16, с.16-17] заключается в том, что один и тот же результат можно получить, исходя из вышеуказанной оптимистической или пессимистической стратегии, проведя меньшее число операций.

4. Результаты вычислительного эксперимента. Разработанные в данной работе алгоритмы построения субоптимистического и субпессимистического решений запрограммированы на языке Паскаль. Для выявления качества разработанных алгоритмов были проведены многочисленные эксперименты над задачами различной размерности.

Коэффициенты этих задач выбраны как псевдослучайные двухзначные или трёхзначные числа следующим образом:

I. $1 \le \underline{a}_j \le 99$, $1 \le \overline{a}_j \le 99$, $1 \le \underline{c}_j \le 99$, $1 \le \overline{c}_j \le 99$.
II. $1 \le \underline{a}_j \le 999$, $1 \le \overline{a}_j \le 999$, $1 \le \underline{c}_j \le 999$, $1 \le \overline{c}_j \le 999$.

$$\underline{b} := [\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{N} \underline{a}_j], \qquad \overline{b} := [\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{N} \overline{a}_j].$$

Результаты вычислительных экспериментов представлены в следующих таблицах (для каждой размерности были решены 5 различных задач).

Таблица 1.
Субоптимистические и субпессимистические значения и погрешности для задач с двухзначными коэффициентами. ($N = 100; n = 60$)

№	b_a	b_y	f_q^{so}	f_y^o	f_a^o	δ_o	f_q^{sp}	f_y^p	f_a^p	δ_p
1	1810	2510	5181.47	5183.67	5163.00	0.004	3055.68	3055.68	3049.00	0.002
2	1689	2397	5381.86	5390.33	5318.00	0.013	3123.05	3123.05	3107.00	0.005
3	1551	2259	5479.95	5479.95	5428.00	0.009	3303.62	3309.98	3297.00	0.004
4	1645	2374	5325.75	5326.19	5322.00	0.001	2912.25	2912.58	2905.00	0.003
5	1568	2293	5252.20	5252.20	5221.00	0.006	2884.60	2885.54	2853.00	0.011

Таблица 2.
Субоптимистические и субпессимистические значения и погрешности для задач с двухзначными коэффициентами. ($N = 200; n = 100$)

№	b_a	b_y	f_q^{so}	f_y^o	f_a^o	δ_o	f_q^{sp}	f_y^p	f_a^p	δ_p
1	3372	4931	10294.15	10294.15	10293.00	0.000	5881.71	5881.79	5868.00	0.002
2	3255	4729	10914.90	10915.32	10889.00	0.002	6168.35	6168.46	6148.00	0.003
3	3410	4792	10041.45	10041.48	10012.00	0.003	5961.59	5961.59	5953.00	0.001
4	3063	4674	11078.38	11078.38	11047.00	0.003	6219.92	6219.92	6184.00	0.006
5	3279	4673	9997.60	9997.60	9958.00	0.004	5818.02	5818.02	5797.00	0.004

Таблица 3.
Субоптимистические и субпессимистические значения и погрешности для задач с двухзначными коэффициентами. ($N = 500; n = 300$)

№	b_a	b_y	f_q^{so}	f_y^o	f_a^o	δ_o	f_q^{sp}	f_y^p	f_a^p	δ_p
1	8590	12769	25692.00	25692.00	25692.00	0.000	14573.45	14573.80	14568.00	0.000
2	8134	11791	26472.52	26472.52	26467.00	0.000	15146.26	15146.26	15062.00	0.006
3	8544	11978	25987.67	25987.67	25967.00	0.001	15604.28	15604.45	15592.00	0.001
4	8164	11466	25582.41	25582.41	25525.00	0.002	15189.27	15189.27	15166.00	0.002
5	8663	11979	25634.69	25634.69	25572.00	0.002	15267.87	15262.87	15248.	0.001

Таблица 4.
Субоптимистические и субпессимистические значения и погрешности для задач с двухзначными коэффициентами. ($N = 1000, n = 600$)

№	b_a	b_y	f_q^{so}	f_y^o	f_a^o	δ_o	f_q^{sp}	f_y^p	f_a^p	δ_p
1	16427	23611	52641.20	52641.62	52577.00	0.001	30709.11	30709.29	30704.00	0.000
2	16472	234.86	51566.17	51566.40	51537.00	0.001	29799.20	29799.56	29783.00	0.001

3	16185	23472	52086.21	52086.22	52073.00	0.000	29886.71	29886.74	29883.00	0.000
4	16691	23497	51617.37	51617.51	51612.00	0.000	30441.71	30441.71	30438.00	0.000
5	16612	23663	51559.21	51559.33	51496.00	0.001	30323.00	30323.00	30323.00	0.000

Таблица 5.
Субоптимистические и субпессимистические значения и погрешности для задач с трёхзначными коэффициентами. ($\boldsymbol{N = 100; n = 60}$)

№	b_a	b_y	f_q^{so}	f_y^o	f_a^o	δ_o	f_q^{sp}	f_y^p	f_a^p	δ_p
1	18254	23510	47257.91	47257.91	47061.00	0.004	30879.71	30879.71	30686.00	0.006
2	17039	22477	49321.81	49322.63	49288.00	0.001	31475.45	31475.45	31218.00	0.008
3	15667	21342	50280.28	50284.72	49602.00	0.014	33541.81	33541.81	33431.00	0.003
4	16607	22368	48663.32	48682.09	48584.00	0.002	29642.26	29655.27	29594.00	0.002
5	15811	21738	48536.45	48547.12	48121.00	0.009	29199.71	29199.71	28738.00	0.016

Таблица 6.
Субоптимистические и субпессимистические значения и погрешности для задач с трёхзначными коэффициентами. ($\boldsymbol{N = 200; n = 100}$)

№	b_a	b_y	f_q^{so}	f_y^o	f_a^o	δ_o	f_q^{sp}	f_y^p	f_a^p	δ_p
1	34047	46811	94501.06	94506.45	94383.00	0.001	59896.98	59897.36	59814.00	0.001
2	32838	44466	100312.86	100316.26	100043.00	0.003	62313.81	62313.81	62101.00	0.003
3	34417	44848	90404.18	90426.74	89981.00	0.005	60218.83	60218.83	59930.00	0.005
4	30930	44479	101255.96	101259.45	100762.00	0.005	62569.80	62575.33	62077.00	0.008
5	33073	44161	90955.25	90956.56	90774.00	0.002	59095.11	59095.28	59090.00	0.000

Таблица 7.
Субоптимистические и субпессимистические значения и погрешности для задач с трёхзначными коэффициентами. ($\boldsymbol{N = 500, n = 300}$)

№	b_a	b_y	f_q^{so}	f_y^o	f_a^o	δ_o	f_q^{sp}	f_y^p	f_a^p	δ_p
1	86601	114839	235962.93	235962.93	235660.00	0.001	147113.88	147126.67	147086.00	0.000
2	82101	111096	241802.91	241803.25	241576.00	0.001	152593.74	152596.21	152092.00	0.003
3	86207	112714	236403.49	236403.49	236357.00	0.000	158329.47	158335.78	158227.00	0.001
4	82365	107931	232834.45	234834.45	232575.00	0.001	153734.09	153734.09	153065.00	0.004
5	87320	112603	234971.87	234972.11	234932.00	0.000	154379.89	154379.89	154034.00	0.002

Таблица 8.
Субоптимистические и субпессимистические значения и погрешности для задач с трёхзначными коэффициентами. ($\boldsymbol{N = 1000, n = 600}$)

№	b_a	b_y	f_q^{so}	f_y^o	f_a^o	δ_o	f_q^{sp}	f_y^p	f_a^p	δ_p
1	165766	222873	478164.49	478165.30	477364.00	0.002	311334.32	311334.40	311263.00	0.000
2	166203	221628	471819.15	471819.41	471688.00	0.000	302085.10	302085.89	302071.00	0.000
3	163288	221423	476424.13	476424.13	476369.00	0.000	302904.46	302912.84	302851.00	0.000

4	168373	221278	469925.50	469925.50	469765.00	0.000	308273.61	308273.82	308247.00	0.000
5	167589	222705	468826.38	468826.38	468281.00	0.001	307221.73	307221.73	307219.00	0.000

В таблицах приняты следующие обозначения:

N – число всех переменных,

n – число Булевых переменных,

b_a, b_y – нижняя и верхняя границы интервала в ограничении (1.2),

f_q^{so}, f_q^{sp} – субоптимистические и субпессимистические значения функционала частично-Булевой задачи (1.1)-(1.4) соответственно,

$f_y^o, f_a^o, f_y^p, f_a^p$ – верхняя и нижняя границы оптимистического и пессимистического значений функционала задачи (1.1)-(1.4) соответственно,

δ_o, δ_p – относительные погрешности субоптимистического и субпессимистического значений функционала задачи (1.1)-(1.4) от оптимистического и пессимистического соответственно, т.е. $\delta_o = (f_y^o - f_q^o / f_y^o)$, $\delta_p = (f_y^p - f_q^p / f_y^p)$.

5. Выводы. Из вышеуказанных таблиц видно, что субоптимистические и субпессимистические значения задачи (1.1)-(1.4), полученные методами, разработанными в данной работе, нестрого отличаются от оптимистического и пессимистического соответственно. Относительные погрешности соответствующих значений не превышают 1,4 % среди решённых случайных 40 задач. А это очень важно для реальных практических задач.

Литература

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. Стр.416.
2. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979, 536 с.
3. Финкельштейн Ю.Ю. Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования. М.: Наука, 1976, 264с.
4. Martello S., Toth P. Knapsack problems, Algorithm and Computers implementations. John Wiley & Sons, Chichster, 1990, 296 p
5. Ковалев М.М. Дискретная оптимизация (целочисленное программирование). М. УРСС, 2003, 192 с.
6. Бабаев Дж.А., Мамедов К.Ш., Мехтиев М.Г. Методы построения субоптимальных решений многомерной задачи о ранце. ЖВМ и МФ, 1978, Т.28, № 6, с. 1443 - 1453.
7. Мамедов К.Ш., Мусаева Т.М. Методы построения приближенных решений многомерной задачи о ранце и нахождение верхней оценки оптимума. Ж. «Автоматика и Вычислительная Техника», 2004, №5, с. 72 - 82.
8. Мамедов К.Ш., Гусейнов С. Я. Методы построения субоптимальных решений задач целочисленного программирования и их последовательное улучшение. Ж. «Автоматика и Вычислительная техника», 2007, №6, ст.20-31.
9. Libura M. Integer programming problems with inexact objective function. Contr. And Cybern. 1980. Vol. 9, № 4. P.189-202.
10. Рощин В. А., Семенова Н.В., Сергиенко И.В. Декомпозиционный подход к решению некоторых задач цедочисленного программирования с неточными данными ЖВМ и МФ.1990. Т. 30, № 5, с. 786-791.
11. Девятерикова М.В., Колоколов А.А. Алгоритмы перебора L-классов для задачи о рюкзаке с интервальными данными. Преринт. Омск: Ом ГУ, 2001, 20 с.
12. Девятерикова М.В., Колоколов А.А., Колосов А.П. Алгоритмы перебора L-классов для булевой задачи о рюкзаке с интервальными данными Материалы III Всероссийской конференции “Проблемы оптимизации и экономическое приложение”. Омск: Изд-во Ом ГТУ, 2006, 87 с.
13. Emelichev V.A., Podkopaev D.P. Quantitative stability analysis for vector problems of 0-1 programming. “Discrete Optimitation”, 2010, № 7. P.48-63.

14. Мамедов К.Ш., Мамедова А.Г. Методы построения субоптимистических и субпессимистических решений в задаче Булевого программирования с интервальными данными // Изв. НАН Азербайджана, 2014, № 3, с.125-131.
15. Мамедов К.Ш., Мамедова А.Г. Методы построения субоптимистических и субпессимистических решений задачи Булевого программирования с целочисленными данными. ИС.: Вестник современной науки 2015, № 2, ст.6-19.
16. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. Пер. с англ. М.: Мир, 1987, 360 с.

UOT 519.852.6

K.Ş. Məmmədov, N.O. Məmmədli

Verilənləri intervallar olan qismən Bul dəyişənli çanta məsələsində suboptimist və subpessimist həllərin qurulması üsulları

İşdə verilənləri intervallar olan qismən Bul dəyişənli çanta məsələsi üçün optimist, pessimist, suboptimist və subpessimist həll anlayışları verilmişdir. Bu məsələ üçün suboptimist və subpessimist həllərin qurulması üsulları işlənmişdir. Bu üsullar baxılan məsələnin müəyyən iqtisadi interpretasiyasına əsaslanır. Müxtəlif böyük ölçülü və təsadüfi əmsalları olan məsələlər üzərində aparılmış çoxsaylı hesabalama eksperimentləri təklif olunmuş üsulların kifayət qədər effektiv olmasını bir daha göstərmişdir.

Açar süzlər: verilənləri intervallar olan qismən Bul dəyişənli çanta məsələsi, optimist, pessimist, suboptimist və subpessimist həll, aşağı və yuxarı sərhədlər, hesablama eksperimentləri

K.Sh. Mammadov, N.O. Mammadli

Methods of constructing suboptimistic and subpessimistic solutions of mixed-Boolean knapsack problem with interval data

The authors introduce the concepts of optimistic, pessimistic, suboptimistic and subpessimistic solutions of mixed-Boolean knapsack problem with interval data. For this problem, methods of constructing of suboptimistic and subpessimistic solutions are developed. These methods are based on some economic interpretation of considered problem. Computational experiments for different large-scale problems with random coefficients show high efficiency of developed methods again.

Keywords: mixed-Boolean knapsack problem with interval data, suboptimistic and subpessimistic solutions, upper and low bounds

Институт Систем Управления НАН Азербайджана Представлено 09.09.2016