Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXVII, No.3, 2017
www.icp.az/2017/3-02.pdf

UOT 519.622.2

V.M. ABDULLAYEV

ÇUBUĞUN QIZDIRILMASI PROSESİNDƏ BİR ƏKS ƏLAQƏLİ İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNİN ƏDƏDİ HƏLLİ

Paylanmış parametrli obyektlərdə əks əlaqəli optimal idarəetmə məsələsi nümunəsində obyektin vəziyyətinə nəzarət nöqtələri yerlərinin optimal paylanması məsələsinə baxılır. Konkretlik üçün çubuğun sobada qızdırılması prosesinə baxılır. Sobadakı temteratur çubuğun ölçülmüş nöqtələrdəki temperaturdan asılı olaraq tənzimlənir. Məsələ yüklənmiş parametrik optimal idarəedilməsi məsələsinə gətirilir. Müşahidə nöqtələrinin yerlərinin koordinatlarına və sintez idarəetmə parametrlərinə görə funksionalın qradiyentinin komponentləri üçün düsturlar alınmışdır. Ədədi eksperimentlərin nəticələri verilmişdir.

Açar sözlər: yüklənmiş diferensial tənliklər, nəzarət nöqtələri, yüklənməyə reaksiya funksiyası, optimal idarəetmə, əks əlaqə ilə idarəetmə, qradiyentin proyeksiyası üsulu

1. Giriş. Ölçmə cihazlarının inkişafının müasir vəziyyəti və hesablama texnikası, xüsusi törəməli diferensial tənliklərlə təsvir olunan paylanmış parametrli obyektlərdə əks əlaqəli optimal idarəetmə ilə effektiv tənzimləmə sistemlərinin yaradılmasına imkan verir [1-4].

İşdə cubuğun sobada qızdırılması prosesinin əks əlaqə ilə idarəedilməsi məsələsinə baxılır. Sobanın ayrı-ayrı yerlərində quraşdırılan müəyyən sayda ölçmə cihazlarının köməyi ilə çubuğun cari temperaturunun ölçülməsi və ona əsasən əks əlaqə ilə sobanın temperaturu idarə olunur. İşdə bu quraşdırılacaq ölçmə cihazlarının optimal yerləşdirilməsi məsələsi tədqiq olunur. Qeyd edək ki, bu istiqamətdə əks əlaqə ilə idarəetmə məsələsinə aid çoxlu işlərin olmasına baxmayaraq, optimal yerləşdirilmə məsələlərinə baxılmamışdır. Bu yaranan müəyyən çətinliklərlə bağlıdır. Bunlardan biri də prosesin riyazi modeli adekvat təsvir olunduqda alınan əks əlaqəli optimal idarəetmə məsələsinin ədədi həllinin tapılması ilə bağlıdır [1-6].

Təklif olunan yanaşmada qoyulan məsələ yüklənmiş diferensial tənlik üçün parametrik optimal idarəetmə məsələsinə gətirilir [7-11]. Məsələnin ədədi həlli üçün birinci tərtib optimallaşdırma üsullarının tətbiqindən ötrü optimallaşdırılan parametrlərə görə funksionalın qradiyentinin komponentləri üçün düsturlar alınmışdır. Ədədi eksperimentlər aparılmış və alınan nəticələrin analizi verilmişdir.

2. Məsələnin qoyuluşu. Tutaq ki, bircins l uzunluqlu çubuqlar T zaman müddətində çubuq üçün verilmiş $V(x),\ x \in [0,l]$ temperaturuna çatmaq üçün sobanın daxilində eyni $\vartheta(t)$ temperaturu yaradan daxili mənbə hesabına ardıcıl olaraq qızdırılır. Onda hər çubuq üçün qızdırılma prosesi aşağıdakı parabolik tip tənliklə təsvir olunur [4, 9]:

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + \alpha\,[\vartheta(t) - u(x,t)]\,,\ \ (x,t) \in \Omega = (0,l) \times (0,T], \qquad (2.1)$$

sərhəd şərtləri isə

$$u_x(0,t) = \lambda\,[u(0,t) - \vartheta(t)]\ ,\quad t \in [0,T], \qquad (2.2)$$

$$u_x(l,t) = -\lambda\,[u(l,t) - \vartheta(t)]\ ,\quad t \in [0,T], \qquad (2.3)$$

kimi olar. Burada $a^2 = \frac{k}{c\rho} = const > 0 -$ istilikkeçirmə əmsalı (temperaturun kiçik intervalda dəyişdikdə), $\alpha = \frac{h}{c\rho}$ və $\lambda = \frac{h}{k}$ – uyğun olaraq çubuğun uzunluğuna və uclarına görə mühit və çubuq arasındakı istilik mübadiləsi əmsallarıdır, h– istilik mübadiləsi əmsalı; k – istilikkeçirmə əmsalı; c – xüsusi istilik tutumu; ρ – materialın sıxlığıdır. $l > 0,\ T > 0$ verilmiş sabitlərdir.

Başlanğıc temperaturu sadəlik üçün çubuğun uzunluğu boyunca sabit, müxtəlif çubuqlar üçün isə dəyişən qəbul edək. Bu halda başlanğıc temperatur mümkün qiymətlərini $B = [\underline{B}, \overline{B}]$ çoxluğunda (intervalında) alır:

$$u(x,0) = b = const,\ \ b \in B\ ,\qquad x \in [0,l]. \qquad (2.4)$$

Başlanğıc temperaturun $\rho_B(b)$ sıxlıq funksiyası

$$\int_B \rho_B(b)db = 1, \quad \rho_B(b) \geq 0, \quad b \in B, \tag{2.5}$$

kimi verilmişdir.

Sobada temperaturun əks əlaqə ilə idarə olunması (tənzimlənməsi) üçün çubuğun verilmiş L sayda $\bar{x}_i \in [0, l]$ nöqtələrində ölçü cihazının köməyi ilə cari $u(x_i, t)$, $i = 1,2 \ldots, L$, temperaturunun ölçülmüş qiymətlərindən asılı olaraq, cari $\vartheta(t)$ temperaturunun təyin olunması hesabına aparılır.

İstilik mənbəyinin ölçmə nöqtələrində aparılan cari ölçmələrdən asılı olan temperaturunun hər bir t anındakı qiyməti aşağıdakı düsturla təyin edirik [9]:

$$\vartheta(t) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} \tilde{\vartheta}_i \tilde{k}_i [u(\xi_i, t) - \tilde{z}_i],$$

$\tilde{\vartheta}_i > 0$ – çəki əmsallarıdır və ξ_i nöqtəsində temperaturun qiymətinin əhəmiyyətlilik dərəcəsini xarakterizə edir; $\tilde{k}_i$ – gücləndirmə əmsalı; $\tilde{z}_i - \xi_i$ nöqtəsində effektiv temperatur, onun qiymət ətrafında ölçmələr aparılmalıdır; $i = 1,2, \ldots, L$.

Aşağıdakı: işarələmələri qəbul edək:

$$k_i = \frac{\tilde{\vartheta}_i \tilde{k}_i}{L}, \quad z_i = \frac{\tilde{\vartheta}_i \tilde{k}_i z_i}{L}, \quad i = 1,2, \ldots., L, \tag{2.6}$$

Onda sobanın temperaturunun idarə olunması üçün düstur aşağıdakı kimi olar:

$$\vartheta(t) = \sum_{i=1}^{L} k_i\, [u(\xi_i, t) - z_i]. \tag{2.7}$$

$k = (k_1, k_2, \ldots, k_L)$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_L)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_L)$ parametrlər vektorlarını əks əlaqəlinin idarəetmə paramterləri adlanıracağıq. Bu parametrləri elə seçmək etmək tələb olunur ki, aşağıdakı funksional minimum qiymət alsın.

$$J(\xi, k, z) = \int_B I(\xi, k, z; b)\rho_B(b)db, \tag{2.8}$$

$$I(\xi, k, z; b) = \beta_1 \int_0^l \mu(x)[u(x, T; \xi, k, z, b) - V(x)]^2\, dx +$$
$$+\sigma_1 \|\xi - \xi^0\|_{R^L}^2 + \sigma_2 \|k - k^0\|_{R^L}^2 + \sigma_3 \|z - z^0\|_{R^L}^2 . \tag{2.9}$$

Burada: $u(x, t) = u(x, T; \xi, k, z, b)$ – (2.1)-(2-3),(2.6) başlanğıc-sərhəd məsələsinin ξ, k, z idarəetmə parametrlərinin verilmiş mümkün qiymətlərinə uyğun həlli β_1 – verilmiş çəki əmsalı; $V(x)$ – çubuğun son zaman anındakı arzuolunan temperatur paylanmasını təyin edən verilmiş funksiya; $\mu(x)$ – çubuğun hər hansı hissəsinin qızdırılmasının zərurilik dərəcəsini təyin edən verilmiş çəki funksiyasıdır; σ_i, $i = 1,2,3$, ξ^0, k^0, z^0 – requlyarlaşdırma əmsallarıdır. T qızdırılma prosesinin verilmiş davametmə müddətidir.

(2.8) – funksionalı ayrı-ayrılıqda hər bir çubuğun qızdırılmağa başlamazdan əvvəl dəqiq başlanğıc temperaturunun naməlum olduğunu nəzərə alaraq, qızdırılma prosesinin bütün çubuqlara görə ortalama idarəetmə meyarını təyin edir.

Optimallaşdırılan ξ, k, z idarəetmə parametrlərinə müəyyən texnoloji məhdudiyyətlər qoyula bilər.

$$0 \leq \xi_i \leq l, \qquad \underline{k_i} \leq k_i \leq \bar{k}_i, \quad \underline{z_i} \leq z_i \leq \bar{z}_i, \quad i = 1,2, \ldots, L. \tag{2.10}$$

Burada $\underline{k_i}, \overline{k_i}, \underline{z_i}, \overline{z_i}$, $i = 1,2, \ldots, L$ – verilmiş kəmiyyətlərdir.

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + \alpha \left[\sum_{i=1}^{L} k_i [u(\xi_i,t) - z_i] - u(x,t) \right], (x,t) \in \Omega, \quad (2.11)$$

$$u_x(0,t) = -\lambda \left[\sum_{i=1}^{L} k_i [u(\xi_i,t) - z_i] - u(0,t) \right], t \in [0,T], \quad (2.12)$$

$$u_x(l,t) = \lambda \left[\sum_{i=1}^{L} k_i [u(\xi_i,t) - z_i] - u(l,t) \right], \quad t \in [0,T]. \quad (2.13)$$

(2.11)-(2.13) məsələsi (2.4) şərtini ödəyən hər bir konkret verilmiş başlanğıc temperatura görə nöqtəvi-yüklənmiş sərhəd məsələsidir, belə ki, onun sağ tərəfində fəza dəyişəninin ayrı-ayrı nöqtələrində faza vəziyyətinin naməlum qiymətləri iştirak edir. (2.12), (2.13) isə qeyri-lokal sərhəd şərtləridir.

(2.11)-(2.13)-dən bu məsələyə ekvivalent olan məsələləri almaq olar.

Belə ki, (2.11) əvəzinə ona ekvivalent olan

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) - \frac{\alpha}{\lambda} u_x(0,t) + \alpha u(0,t) - \alpha u(x,t), \ (x,t) \in \Omega = (0,l) \times (0,T], \quad (2.14)$$

tənliyini və (2.12), (2.13) sərhəd şərtlərinin əvəzinə isə

$$u_x(0,t) + u_x(l,t) - \lambda[u(0,t) - u(l,t)] = 0, \quad t \in [0,T], \quad (2.15)$$

$$\lambda u(0,t) - u_x(0,t) = \lambda \sum_{i=1}^{L} k_i [u(\xi_i,t) - z_i], \quad t \in [0,T], \quad (2.16)$$

əvəzinə isə şərtlərini almiş olarıq və ya (2.11) əvəzinə ona ekvivalent olan

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + \frac{\alpha}{\lambda} u_x(l,t) + \alpha u(l,t) - \alpha\, u(x,t), \ (x,t) \in \Omega = (0,l) \times (0,T], \quad (2.17)$$

tənliyini, (2.12), (2.13) sərhəd şərtlərinin əvəzinə isə (2.15) və

$$\lambda u(\mathrm{l},t) + u_x(\mathrm{l},t) = \lambda \sum_{i=1}^{L} k_i [u(\xi_i,t) - z_i], \quad t \in [0,T], \quad (2.16)$$

ekvivalent şərtlərini almaq olar.

Burada tənliyin yüklənmiş nöqtəsi çubuğun sol və ya sağ ucları olur, sərhəd şərtləri isə qeyri-lokal qalaraq yalnız görünüşləri ilə fərqlənirlər. Qeyd etmək lazımdır ki, ədədi üsullar, alqoritm və hesablama mürəkkəbliyinə görə, hər iki qoyuluşlu məsələlər ekvivalentdir.

3. Məsələnin həlli. Optimal idarəetmə məsələsinin ədədi həllində $y = (\xi, k, z)^*$ parametrlər vektorunun təyini üçün birinci tərtib optimallaşdırma üsullarından istifadə olunur, xüsusi halda, qradiyentin proyeksiyası üsulundan:

$$y^{\nu+1} = P_{(2.10)}[y^\nu - \gamma_\nu\, grad(\mathcal{J}(y^\nu)], \nu = 0,1,..., \quad (3.1)$$

burada, $P_{(2.10)}[\,\cdot\,]$ – mümkün çoxluqda verilmiş (2.10) şərtləri ilə $y = (\xi, k, z)^*$ parametrlərinin proyeksiya operatorudur; γ_ν – birölçülü minimallaşdırmanın addımıdır.

(3.1) iterasiya prosedurasını tətbiq etmək üçün əvvəlcə (1.8), (1.9) funksionalının idarəetmə komponentlərinə görə qradiyentlərinin düsturlarını almaq lazımdır:

$$grad\ \mathcal{J}(y) = \left(\frac{\partial \mathcal{J}(\xi,k,z)}{\partial \xi}, \ \frac{\partial \mathcal{J}(\xi,k,z)}{\partial k}, \ \frac{\partial \mathcal{J}(\xi,k,z)}{\partial z} \right)^*.$$

Bunun üçün optimallaşdırılan parametrlərə görə funksionalın artımını hesablamaq üçün məlum texnalogiyandan istifadə edirik [5]. Hər bir arqumentə görə funksionalın artımının xətti hissəsi onun həmin komponentinə görə axtarılan qradiyenti olur.

Funksionalın qradiyentin düsturunu almazdan əvvəl qeyd edək ki, (2.8), (2.9) düsturlarında (2.5) başlanğıc şərti B çoxluğundan ixtiyari qiymət alır, onda yaza bilərik:

$$grad\,\mathcal{J}(y) = grad \int_B I(\xi,k,z;b)\rho_B(b)db = \int_B grad\, I(y;b)\rho_B(b)db. \qquad (3.2)$$

Ona görə (2.5) başlanğıc şərtlərdən ixtiyari birisi üçün $gradI(y;b)$ qradiyentinin düsturunu alaq:

Tutaq ki, yüklənmiş sərhəd məsələnin $u(x,t) = u(x,t;y)$ həlli $y = (\xi,k,z)^*$ parametrlərinə uyğun $\Delta y = (\Delta\xi,\Delta k,\Delta z)^*$ artımı alıb. $\tilde{u}(x,t) = \tilde{u}(x,t;\tilde{y}) = u(x,t) + \Delta u(x,t)$ ilə (2.4), (2.11)–(2.13) məsələsinin uyğun $\tilde{y} = y + \Delta y$ arqumettlərinə görə artımını işarə edək:

(2.5), (2.11)-(2.13)-dən aydındır ki, $\Delta u(x,t)$ aşağıdakı sərhəd məsələsinin həllidir:

$$\Delta u_t(x,t) = a^2\Delta u_{xx}(x,t) + \alpha\sum_{i=1}^{L}(k_i\Delta u(\xi_i,t) + k_i u_x(\xi_i,t)\Delta\xi_i +$$
$$+(u_x(\xi_i,t) - z_i)\Delta k_i - k_i\Delta z_i) - \alpha\Delta u(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega, \qquad (3.3)$$

$$\Delta u_x(0,t) = -\lambda\sum_{i=1}^{L}(k_i\Delta u(\xi_i,t) + k_i u_x(\xi_i,t)\Delta\xi_i +$$
$$+(u_x(\xi_i,t) - z_i)\Delta k_i - k_i\Delta z_i) + \lambda\Delta u(0,t), t\in[0,T], \qquad (3.4)$$

$$\Delta u_x(l,t) = \lambda\sum_{i=1}^{L}(k_i\Delta u(\xi_i,t) + k_i u_x(\xi_i,t)\Delta\xi_i +$$
$$+(u_x(\xi_i,t) - z_i)\Delta k_i - k_i\Delta z_i) - \lambda\Delta u(l,t), t\in[0,T], \qquad (3.5)$$
$$\Delta u(x,0) = 0, \;\; x\in[0,l]. \qquad (3.6)$$

(3.3) tənliyini almaq üçün

$$u(\xi_i + \triangle\,\xi_i, t) = u(\xi_i,t) + u_x(\xi_i,t)\Delta\xi_i + o(|\Delta\xi_i|)$$

münasibətindən istifadə olunmuşdur.

(2.8) funksionalının artımını isə belə olar:

$$\Delta I(y,b) = I(\tilde{y},b) - I(y,b) = I(y+\Delta y,b) - I(y,b) =$$
$$= 2\beta_1\int_0^l \mu(x)[u(x,T;\xi,k,z,b) - V(x)]\Delta u(x,T)\,dx +$$
$$+2\sum_{i=1}^{L}[\sigma_1(\xi_i - \xi_i^0)\Delta\xi_i + \sigma_2(k_i - k_i^0) + \sigma_3(z_i - z_i^0)\Delta z_i].$$

Tutaq ki, $\psi(x,t) -$ funksiyası Ω oblastında (x,t)-yə nəzərən ixtiyari kəsilməz funksiyadır, $t\in(0,T)$-yə görə diferensiallanandır, bütün $x\in(\xi_{\,i},\xi_{i+1})$, $i = 0,\ldots,L$, intervallarında x-ə görə ikiqat diferensiallanandır. Belə ki, $\xi_0 = 0$, $\xi_{L+1} = l$. (3.3) tənliyini $\psi(x,t)$-ə vurub Ω düzbucaqlısında inteqrallayıb, (3.4)-(3-6) şərtlərini nəzərə alsaq, alarıq:

$$\int_0^T\int_0^l \psi(x,t)\Delta u_t(x,t)dxdt - a^2\sum_{i=0}^{L}\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}\int_0^T \psi(x,t)\Delta u_{xx}(x,t)dtdx -$$
$$-\alpha\int_0^T\int_0^l \psi(x,t)\sum_{i=1}^{L}(k_i\Delta u(\xi_i,t) + k_i u_x(\xi_i,t)\Delta\xi_i + (u_x(\xi_i,t) - z_i)\Delta k_i - k_i\Delta z_i)\,dxdt +$$
$$+\alpha\int_0^T\int_0^l \psi(x,t)\Delta u(x,t)dxdt = 0. \qquad (3.7)$$

(3.7)-nin birinci və ikinci toplananlarına hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq edib, (3.4)-(3.6) şərtlərini nəzərə alsaq, alarıq:

$$\int_0^T \int_0^l \psi(x,t)\Delta u_t(x,t)dxdt = \int_0^l \psi(x,T)\Delta u(x,T)dx - \int_0^T \int_0^l \psi_t(x,t)\Delta u(x,t)dxdt, \qquad (3.8)$$

$$a^2 \sum_{i=0}^{L} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \int_0^T \psi(x,t)\Delta u_{xx}(x,t)dtdx =$$

$$= a^2 \int_0^T \left[\left(\psi_x(0,t) - \lambda\psi(0,t)\right)\Delta u(0,t) + \left(-\psi_x(l,t) - \lambda\psi(l,t)\right)\Delta u(l,t)\right]dt +$$

$$+a^2 \sum_{i=1}^{L} \int_0^T [\psi_x^-(\xi_i,t) - \psi_x^+(\xi_i,t) + \lambda(\psi(0,t) + \psi(l,t))k_i]\Delta u(\xi_i,t)dt +$$

$$+a^2 \sum_{i=1}^{L} \int_0^T (\psi^+(\xi_i,t) - \psi^-(\xi_i,t))\Delta u_x(\xi_i,t)dt +$$

$$+a^2 \sum_{i=1}^{L} k_i \Delta\xi_i \int_0^T \lambda\left(\psi(l,t) + \psi(0,t)\right)u_x(\xi_i,t)dt +$$

$$+a^2 \sum_{i=1}^{L} \Delta k_i \int_0^T \lambda\left(\psi(l,t) + \psi(0,t)\right)(u(\xi_i,t) - z_i)\, dt +$$

$$+a^2 \sum_{i=1}^{L} k_i \Delta z_i \int_0^T \lambda\left(-\psi(l,t) - \psi(0,t)\right) dt + a^2 \int_0^T \int_0^l \psi_{xx}(x,t)\Delta u(x,t)dxdt. \qquad (3.9)$$

Burada

$$\psi^-(\xi_i,t) = \psi(\xi_i - 0,t), \quad \psi^+(\xi_i,t) = \psi(\xi_i + 0,t)$$

işarələmələrindən istifadə olunmuşdur.

(3.7)-(3.9) münasibətlərindən istifadə etsək, onda, funksionalın artımı üçün alarıq:

$$\Delta I = \int_0^l \left[\psi(x,T) + 2\beta_1\mu(x)\left(u(x,T) - V(x)\right)\right] \Delta u(x,T)dx +$$

$$+ \int_0^T \int_0^l [-\psi_t(x,t) - a^2\psi_{xx}(x,t) + \alpha\psi(x,t)]\Delta u(x,t)dxdt +$$

$$-a^2 \int_0^T \left(\psi_x(0,t) - \lambda\psi(0,t)\right)\Delta u(0,t)dt + a^2 \int_0^T \left(\psi_x(l,t) + \lambda\psi(\mathrm{l},\mathrm{t})\right)\Delta u(l,t)dt -$$

$$-a^2 \sum_{i=1}^{L} \int_0^T \left[\psi_x^-(\xi_i,t) - \psi_x^+(\xi_i,t) + \lambda\left(\psi(0,t) + \psi(l,t)\right)k_i +\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha}{a^2} k_i \int_0^l \psi(x,t)dx\right] \Delta u(\xi_i,t)dt - a^2 \sum_{i=1}^{L} \int_0^T (\psi^+(\xi_i,t) - \psi^-(\xi_i,t))\Delta u_x(\xi_i,t)dt +$$

$$+\sum_{i=1}^{L} k_i \Delta\xi_i \int_0^T \left[-a^2\lambda\big(\psi(l,t)+\psi(0,\mathrm{t})\big) - \alpha \int_0^l \psi(x,t)dx \right] u_x(\xi_i,t)dt$$

$$+\sum_{i=1}^{L} \Delta k_i \int_0^T \left[-a^2\lambda\big(\psi(l,t)+\psi(0,\mathrm{t})\big) - \alpha \int_0^l \psi(x,t)dx \right] (u(\xi_i,t)-z_i)dt$$

$$+\sum_{i=1}^{L} k_i \Delta z_i \int_0^T \left[a^2\lambda\big(\psi(l,t)+\psi(0,\mathrm{t})\big) + \alpha \int_0^l \psi(x,t)dx \right] dt +$$

$$+2\sum_{i=1}^{L} [\sigma_1(\xi_i-\xi_i^0)\Delta\xi_i + \sigma_2(k_i-k_i^0) + \sigma_3(z_i-z_i^0)\Delta z_i] +$$

$$+o\|\Delta T\| + o\|\Delta k\| + o\|\Delta z\|. \qquad (3.10)$$

$\psi(x,t)$ funksiyasının ixtiyariliyindən tələb edirik ki, o, aşağıdakı başlanğıc-sərhəd məsələsinin sanki hər yerdə həlli olsun.

$$\psi_t(x,t) = -a^2\psi_{xx}(x,t) + \alpha\psi(x,t),\ (x,t)\in\Omega, \qquad (3.11)$$

$$\psi(x,T) = -2\beta_1\mu(x)\big(u(x,T)-V(x)\big),\ x\in[0,l], \qquad (3.12)$$

$$\psi_x(0,t) = \lambda\psi(0,t), \qquad t\in[0,T], \qquad (3.13)$$

$$\psi_x(l,t) = -\lambda\psi(l,t), \qquad t\in[0,T]. \qquad (3.14)$$

$t\in[0,T]$ üçün $\xi_i, i=1,2,\dots,L,$ nöqtələrində isə

$$\psi_x^-(\xi_i,t) = \psi_x^+(\xi_i,t) - \lambda\big(\psi(0,t)+\psi(l,t)\big)k_i - \frac{\alpha}{a^2}k_i\int_0^l \psi(x,t)dx, i=1,2,\dots,L, \qquad (3.15)$$

$$\psi^+(\xi_i,t) = \psi^-(\xi_i,t),$$

şərtlərini ödəyir.

Funksionalın qradiyentinin komponentləri uyğun arqumentlərinin artımının xətti hissə kimi təyin olunduğundan, alarıq:

$$grad_{\xi_i} I = k_i \int_0^T \left[-a^2\lambda\big(\psi(l,t)+\psi(0,\mathrm{t})\big) - \alpha\int_0^l \psi(x,t)dx \right] u_x(\xi_i,t)\,dt +$$

$$+2\sigma_1(\xi_i-\xi_i^0), i=1,2,\dots,L, \qquad (3.16)$$

$$grad_{k_i} I = \int_0^T (u(\xi_i,t)-z_i) \left[-\alpha\int_0^l \psi(x,t)\,dx - a^2\lambda\big(\psi(0,t)+\psi(l,\mathrm{t})\big) \right] dt +$$

$$+2\sigma_2(k_i-k_i^0), \qquad i=1,2,\dots,L, \qquad (3.17)$$

$$grad_{z_i} I = k_i \int_0^T \left[\alpha\int_0^l \psi(x,t)\,dx + a^2\lambda\big(\psi(0,t)+\psi(l,\mathrm{t})\big) \right] dt +$$

$$+2\sigma_3(z_i-z_i^0), \qquad i=1,2,\dots,L, \qquad (3.18)$$

Beləliklə, aşağıdakı teoremin isbatını almış oluruq.

Teorem. (2.11)-(2.13), (2.4) məsələsi üçün funksionalın (ξ,k,z) parametrlərinə görə qradiyenti aşağıdakı düsturlarla təyin olunurlar:

$$grad_{\xi_i}J = \int\limits_B \left\{ k_i \int\limits_0^T \left[\left(-a^2\lambda\big(\psi(l,t)+\psi(0,t)\big) - \alpha \int\limits_0^l \psi(x,t)dx\right] u_x(\xi_i,t)\, dt + 2\sigma_1(\xi_i - \xi_i^0) \right\} \rho_B(b)db, \quad (2.19)$$

$$grad_{k_i}J = \int\limits_B \left\{ \int\limits_0^T (u(\xi_i,t) - z_i) \left[-\alpha \int\limits_0^l \psi(x,t)\, dx - a^2\lambda\big(\psi(0,t)+\psi(l,t)\big)\right] dt + 2\sigma_2(k_i - k_i^0) \right\} \rho_B(b)db, \quad (3.20)$$

$$grad_{z_i}J = \int\limits_B \left\{ k_i \int\limits_0^T \left[\alpha \int\limits_0^l \psi(x,t)\, dx + a^2\lambda\big(\psi(0,t)+\psi(l,t)\big)\right] dt + 2\sigma_3(z_i - z_i^0) \right\} \rho_B(b)db, \quad (3.21)$$

burada $i = 1,2,\dots,L$, $u(x,t), \psi(x,t)$-$u(x,0) = b$ başlanğıc şərtlərə görə uyğun olaraq (2.8)-(2.13) sərhəd məsələsinin və (3.11)-(3.15) qoşma məsələsinin həllidirlər.

(2.8)-(2.13) başlanğıc-sərhəd məsələsi və (3.11)-(3.15) qoşma məsələsi spesifik xüsusiyyətlərə malikdirlər. Onların ədədi həlli üçün [9, 11-13] işlərində təklif olunmuş şəbəkə və düz xətlər üsulundan istifadə olunmuşdur.

4. Ədədi eksperimentlərin nəticələri. Ədədi eksperimentlər test məsələ üzərində aparılmışdır. Başlanğıc temperatur $B = [5^0; 20^0]$ parçasında paylanır. Məsələnin qoyuluşundakı verilənlərin qiymətləri aşağıdakı kimidir:

$l = 100sm$; $a^2 = 1\, sm^2/san$; $\lambda = 0.01$. $\overline{\vartheta} = 1000$, $\underline{\vartheta} = 10$, $V(x) = 400(x-0.5)^2 + 800$, a $\mu(x) = 1$, $x \in [0,1]$; $\rho_B(b)$ paylanma funksiyası hesablamada müntəzəm paylanma götürülmüşdür: $\rho_B(b) = 1/(\overline{B} - \underline{B})$. Məsələ $\xi_1, \xi_2 -$ ölçü cihazlarının qoyulma yerlərini, $k_i, z_i, i = 1,2$ requlyarlaşdırma parametrlərini təyin etməkdən ibarətdir.

Hesablama eksperimentləri optimallaşdırılan parametrlərin müxtəlif başlanğıc qiymətləri üçün aparılmışdır. Cədvəl 1-də bu qiymətlət və onlara uyğun funksionalın qiymətləri verilmişdir.

Cədvəl 1

$k_1^0, k_2^0, z_1^0, z_2^0, \xi_1^0, \xi_2^0$ **optimallaşdırılan parametrlərin başlanğıc qiymətləri və onlara uyğun funksionalın qiymətləri**

N	k_1^0	k_2^0	z_1^0	z_2^0	ξ_1^0	ξ_2^0	$J^0(y)$
1	0.1	0.5	520	610	0.1	0.7	124625.2264
2	0.4	0.7	470	310	0.4	0.6	374125.3873

Cədvəl 2-də verilmiş başlanğıc qiymətlərə uyğun optimallaşdırılan parametrlərin (3.19)-(3.21) düsturları ilə hesablanılan qradientlərinin normalarının qiymətləri və aşağıdakı düsturu ilə funksionalın qradiyentinin fərqlər üsulu ilə hesablanılan qradiyentlərinin normalarının qiymətləri verilmişdır:

$$\partial J(y)/\partial y_j \approx \big(J(y+\varepsilon e_j) - J(y-\varepsilon e_j)\big)/(2\varepsilon), \quad (4.1)$$

Burada $y_j - N$ ölçülü optimallaşdırılan y vektorunun j-cu komponenti, (optimallaşdırılan komponentlər $k_i, z_i, \xi_i, i = 1,2, \dots L$,), $e_j - j$-cu komponenti 1-ə, qalan komponenti 0-ə bərabər olan N ölçülü vektor. ε kəmiyyətinə müxtəlif qiymətlər verməklə eksperimentlər aparılmış və onlardan ən qəbul olunanı cədvəldə verilmişdir.

Cədvəl 2
Funksionalın (3.19)-(3.21) və (4.1) düsturları vasitəsilə cədvəl 1-də verilmiş başlanğıc qiymətlərə uyğun hesablanmış normallaşdırılmış qradiyentlərin qiymətləri

N	Düsturlar	$\nabla_{k_1}^{norm} J$	$\nabla_{k_2}^{norm} J$	$\nabla_{z_1}^{norm} J$	$\nabla_{z_2}^{norm} J$	$\nabla_{\xi_1}^{norm} J$	$\nabla_{\xi_2}^{norm} J$
1	(3.19)–(3.21)	-0.42046	0.90731	-0.79315	-0.60902	-0.99357	-0.11319
	(4.1)	-0.42195	0.90896	-0.79476	-0.61105	-0.99502	-0.11497
2	(3.19)–(3.21)	0.45161	0.89221	-0.53952	-0.84198	-0.54803	-0.83646
	(4.1)	0.45208	0.89389	-0.54078	-0.84205	-0.54787	-0.83735

Cədvəl 3-də $k_i, z_i, \xi_i, i = 1,2, \dots L,$ optimallaşdırılan parametrlərin cədvəl1-də verilmiş başlanğıc qiymətlərinə görə qoşma qradiyentin proyeksiya üsulunin köməyi ilə yeddinci iterasiyada alınan həlli verilmişdir.

Cədvəl 3
7-ci iterasiyadan sonra optimallaşdırılan parametrlərin və funksionalın qiyməti

N	$k_1^{(7)}$	$k_2^{(7)}$	$z_1^{(7)}$	$z_2^{(7)}$	$\xi_1^{(7)}$	$\xi_2^{(7)}$	$J^{(7)}(y)$
1	0.1944	0.2963	800.0004	824.9992	0.4999	0.7499	0.000072
2	0.1976	0.3001	799.9986	825.0007	0.4999	0.7499	0.000049

Eksperimentlərdə prosesin ölçü nöqtələrindəki $u(\xi_1, t)$, $u(\xi_2, t)$ vəziyyətlərinə aşağıdakı düstura əsaslanan təsadüfi küylər verilmişdir:

$$u(\xi_i, t) = u(\xi_i, t)\big(1 + \chi(2\theta_i - 1)\big), \qquad i = 1,2,$$

burada $\theta_i - [0,1]$ parçasında müntəzəm paylanan təsadüfi kəmiyyət, χ – küyün səviyyəsidir.

Cədvəl 4-də funksionalın alınmış qiyməti və bu qiymətin çubuğun uzunluğuna görə arzuolunan temperatura görə nisbi meyli müxtəlif küylər üçün verilmişdir. $\mathbf{0}$% (küysüz)-$\boldsymbol{\chi} = \mathbf{0}$; $\mathbf{1}$%, $\mathbf{3}$%, $\mathbf{5}$% -ə, uyğun olaraq, $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{0.01}, \boldsymbol{\chi} = \mathbf{0.03}, \ \boldsymbol{\chi} = \mathbf{0.05}$.

Cədvəl 4
Funksionalın alınmış qiyməti və bu qiymətin çubuğun uzunluğuna görə arzuolunan temperatura görə müxtəlif küylər üçün nisbi meyli

	$\chi = 0.00$	$\chi = 0.01$	$\chi = 0.03$	$\chi = 0.05$
$\max\limits_{x\in[0,1]} \lvert u(x,T) - V(x) \rvert / \lvert V(x) \rvert$	0.010941	0.011052	0.011311	0.011574
$J^*(y)$	0.000049	0.000050	0.000051	0.000052

5. Nəticə. Məqalədə çubuğun qızdırılması prosesi nümunəsində obyektin cari vəziyyətini ölçmək üçün quraşdırılacaq ölçmə cihazlarının yerlərinin optimal paylanması məsələsinə baxılmışdır. İdarəetmə parametrləri əks əlaqə ilə idarəetmədə istifadə olunur. Məsələnin riyazi qouyuluşu yüklənmiş başlanğıc-sərhəd şərtli parametrik optimal idarəetmə məsələsinə gətirilir.

Optimallaşdırılan parametrlərə görə funksionalın qradiyentinin komponentləri üçün düsturlar alınmış və onlardan istifadə etməklə məsələnin ədədi həlli üçün birinci tərtib optimallaşdırma üsulu olan qoşma qradiyentin proyeksiyası üsulu tətbiq olumuşdur. Ədədi eksperimentlər aparılmış və alınan nəticələrin analizi verilmişdir.

Məqalədə məsələnin qoyuluşu və məsələnin ədədi həllindən ötrü alınan düsturlar üçün yanaşma digər proseslərin əks əlaqə ilə idarəedilməsi üçün, habelə, xüsusi törəməli digər tip başlanğıc-sərhəd şərtli məsələlərlə təsvir olunan proseslərə tətbiq oluna bilər.

Ədəbiyyat

1. Ray W.H. Advanced Process Control. McGraw-Hill Book Company. 1981.
2. Егоров А.И. Основы теории управления. -М.: Физматлит, 2004.
3. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1984.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. *М.*: Наука, 1966.
5. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
6. Айда-заде К.Р. Подход к синтезу сосредоточенных управлений в распределенных системах //Автоматика и вычислительная техника. 2005, №3, с.16-22.
7. Алиханов А.А, Березков А.М., М.Х.Шхануков–Лафшиев. Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008, Т.48, №9, с.1619-1628.
8. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. Москва, Наука, 2012, с.232.
9. Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М. Об одном подходе к синтезу управления процессами с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. 2012, №9, с.3-19.
10. Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. Численное решение задач оптимального управления нагруженными сосредоточенными системами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006, Т.46, №9, с.1566-1581.
11. Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. О численном решении нагруженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004, Т.44, №9, с.1585-1595.
12. Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. Подход к численному решению одного класса нагруженных нелокальных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014, Т.54, №7, с.1096-1109.
13. Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. Конечноразностные методы решения нагруженных параболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016, Т.56, №1, с.99-116.

V.M. Abdullayev

Numerical solution to a problem of feedback control for the rod heating process

Within the framework of optimal feedback control problems with respect to objects with distributed parameters, we consider the problem of optimizing the locations of points of control over the object state. To be specific, we consider the process of heating a rod in a furnace, the temperature of which is regulated depending on the measured temperature at certain points of the rod. The problem is reduced to a problem of parametric optimal control of a loaded system. We derive formulas for the components of the gradient of the objective functional with respect to the coordinates of the locations of control points and to the parameters of the synthesized control, which depends on the current measurements. The results of the conducted numerical experiments are given.

Keywords: loaded differential equation, control point, reaction to loading, optimal control, feedback, gradient projection method

УДК 519.622.2

В.М. Абдуллаев

Численное решение одной задачи синтеза управления процессом нагрева стержня

В рамках задач оптимального управления с обратной связью объектами с распределенными параметрами рассматривается задача оптимизации мест размещения точек контроля за состоянием объекта. Для конкретности расмотрен процесс нагрева стержня в печи, температура которой регулируется в зависимости от температуры в замеренных точках стержня. Задача приводится к параметрическому оптимальному управлению нагруженной системый. Получены формулы для компонент градиента функционала по координатам размешения точек контроля и параметрам синтезированного управления, зависящего от текущих замеров. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: нагруженное дифференциальное уравнение, точка контроля, реакция на нагружение, оптимальное управление, обратная связь, метод проекции градиента

AMEA İdarəetmə Sistemləri İnstitutu
Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universiteti

Təqdim olunub 29.11.2016