Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXVII, No.3, 2017
www.icp.az/2017/3-06.pdf

УДК 519.8

С.Е. БУХТОЯРОВ, В.А. ЕМЕЛИЧЕВ

ПОСТОПТИМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

На основе портфельной теории Марковица формулируется многокритериальная булева инвестиционная задача с минимаксными критериями рисков Сэвиджа, состоящая в поиске множества Парето. Получены нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса T_2-устойчивости задачи.

Ключевые слова: многокритериальность, инвестиционная булева задача, риски, критерий Сэвиджа, множество Парето, радиус устойчивости, T_2-устойчивость, норма Чебышева

1. Введение. Дискретная оптимизация является в настоящее время одной из наиболее динамично развивающихся областей математики. Задачи дискретной математики многочисленны и разнообразны. Они возникают в различных областях математики, а также в экономике, технике, информатике. Это обстоятельство обусловило стремительный рост числа работ, посвященных теории и методам дискретной оптимизации (см., например, монографии [1-7], а также библиографию в них). Широкое распространение дискретных оптимизационных моделей привлекло внимание многих специалистов к исследование разнообразных аспектов устойчивости, а также проблем параметрического и постоптимального анализа как скалярных (однокритериальных), так и векторных (многокритериальных) задач дискретной оптимизации (монографии [5, 8, 9], обзоры [10-13] и аннотированные библиографии [14-16]).

Несмотря на обилие подходов к анализу устойчивости в задачах дискретной оптимизации, можно выделить два основных направления: качественное и количественное.

В рамках качественного направления авторы концентрируют свое внимание на выявлении различных типов устойчивости задачи [17-24], установлении связи между различными видами устойчивости [25, 26], а также на поиске и описании региона устойчивости оптимального решения [27].

Количественное направление, достаточно подробно изложенное в [28], связано с получением оценок допустимых изменений в исходных данных задачи, сохраняющих некоторое наперед заданное свойство оптимальных решений [10, 12, 29-31], и разработкой алгоритмов вычисления этих оценок [32-36]. Ключевым понятием здесь является радиус устойчивости, под которым понимается радиус предельного “шара устойчивости”, т.е. такой окрестности исходных данных в метрическом пространстве параметров задачи, что любая “возмущенная” задача с параметрами из этой окрестности обладает некоторым свойством инвариантности по отношению к исходной задаче.

Настоящая статья относится ко второму направлению и является продолжением публикаций [37-44], посвященных получению оценок радиуса различных типов устойчивости решений многокритериальных булевых инвестиционных задач с разнообразными критериями оптимизма и пессимизма при различных сочетаниях метрик в пространствах параметров задачи.

Обычно под устойчивостью многокритериальной задачи, состоящей в поиске множества Парето, понимают [5] дискретный аналог свойства полунепрерывности снизу или сверху по Хаусдорфу точечно-множественного отображения, задающего паретовскую функцию выбора. Например, полунепрерывность снизу в задачах дискретной оптимизации превращается в свойство сохранения всех оптимальных решений при любых изменениях ее параметров в пределах “малой” окрестности исходных данных. Иными словами, внутри этой окрестности не исчезает ни одно оптимальное решение исходной задачи. Ослабление этого требования приводит к такому типу устойчивости, который трактуется как существование окрестности первоначальных данных задачи, внутри которой хотя и возможно исчезновение старых оптимальных решений, однако хотя бы одно оптимальное решение исходной задачи должно сохранять оптимальность, т.е. необходимо существование хотя бы одного устойчивого оптимального решения. Следуя терминологии [5], будем называть такой тип устойчивости T_2-устойчивостью.

Впервые T_2-устойчивость была исследована в [45] для однокритериальной (скалярной) линейной траекторной задачи. Позднее в [46, 47] были получены формулы этого типа устойчивости для многокритериального варианта траекторной задачи, а также для многокритериальной задачи целочисленного линейного программирования.

В настоящей статье в рамках модели Марковица рассматривается многокритериальная инвестиционная булева задача формирования портфеля инвестора с критериями минимизации рисков упущенных возможностей, которым подвергается инвестор при выборе инвестиционных проектов. При этом перманентная хрупкость и непредсказуемость состояний рынка учитывается путем использования минимаксных критериев Сэвиджа (критериев крайнего пессимизма). В результате проведенного параметрического анализа найдены нижняя и верхняя оценки радиуса T_2-устойчивости инвестиционной задачи в предположении, что в пространствах параметров задачи задана норма Чебышева l_∞.

2. Постановка задачи и основные определения. Основываясь на портфельной теории Марковица [48], рассмотрим многокритериальный дискретный вариант задачи минимизации рисков при выборе инвестиционных портфелей. Для этого введем ряд обозначений:

$N_n = \{1, 2, ..., n\}$ – разнообразные альтернативные инвестиционные проекты (активы);

N_m – множество возможных состояний финансового рынка (сценарии, ситуации рынка);

N_s – множество видов рисков;

r_{ijk} – величина меры экономического риска вида $k \in N_s$, которому подвергается инвестор, выбирая проект $j \in N_n$ в предположении, что рынок находится в состоянии $i \in N_m$;

$R = \left[r_{ijk} \right] \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$;

$x = \left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)^T \in X \subseteq \mathbf{E}^n$ – инвестиционный портфель, где $\mathbf{E} = \{0,1\}$, с координатами

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если выбирается проект } j, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$X \subset \mathbf{E}^n$ – множество всех инвестиционных портфелей, т.е. тех, реализация которых обеспечивает инвестору ожидаемый доход и не превосходит имеющегося у него начального капитала;

$\mathbf{R}^n$ – пространство инвестиционных проектов;

$\mathbf{R}^m$ – пространство состояний финансового рынка;

$\mathbf{R}^s$ – критериальное пространство рисков.

На заданном множестве инвестиционных портфелей (булевых векторов) X, $|X| \geq 2$, зададим векторный критерий

$$f(x, R) = (f_1(x, R_1), f_2(x, R_2), ..., f_s(x, R_s)),$$

компонентами которого являются минимаксные критерии рисков Сэвиджа [49]

$$f_k(x, R_k) = \max_{i \in N_m} r_{ik} x = \max_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} r_{ijk} x_j \to \min_{x \in X}, k \in N_s$$

где $R_k \in \mathbf{R}^{m\times n}$ – k-е сечение матрицы $R=[r_{ijk}]\in \mathbf{R}^{m\times n\times s}$ со строками

$$r_{ik}=(r_{i1k}, r_{i2k}, \dots, r_{ink})\in R^n, i\in N_m.$$

Таким образом, критерий "узкого места" (bottleneck) Сэвиджа [50, 51] рекомендует в условиях неопределенности состояния финансового рынка выбирать тот портфель, при котором величина суммарного риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации, а именно, когда риск максимален. Иными словами, здесь действует мудрое правило, предписывающее предполагать худшее.

Под многокритериальной инвестиционной булевой задачей $Z_m^s(R),\ s,m\in \mathbf{N}$, с критериями Сэвиджа будем понимать задачу поиска множества Парето, т.е. множества парето-оптимальных (эффективных) портфелей

$$P^s(R)=\{x\in X:\ P(x,R)=\varnothing\},$$

где

$$P(x,R)=\{x'\in X\ :\ x\underset{R}{\succ}x'\},$$

$$x\underset{R}{\succ}x' \iff f(x,R)\ge f(x',R) \quad \& \quad f(x,R)\ne f(x',R).$$

Ясно, что $P^s(R)\ne\varnothing$ при любой матрице $R\in\mathbf{R}^{m\times n\times s}$.

В пространстве $\mathbf{R}^d$ произвольной размерности $d\in\mathbf{N}$ зададим чебышевскую норму l_∞ :

$$\| z\|=\max\{| z_j|\ :\ j\in N_d\},$$

где $z=(z_1,z_2,\dots,z_d)^T\in\mathbf{R}^d$. Под нормой матрицы будем понимать норму вектора, составленного из всех ее элементов. Таким образом,

$$\| R\|\ge\| R_k\|\ge\| r_{ik}\|,\quad i\in N_m,\quad k\in N_s. \tag{2.1}$$

Для любых векторов $x, x'\in X$ и любой матрицы $R_k\in\mathbf{R}^{m\times n}$ очевидны неравенства

$$r_{ik}x-r_{i'k}x'\ge-\| R_k\|\| x-x'\|^*,\quad i,i'\in N_m,\quad k\in N_s, \tag{2.2}$$

где

$$\| z\|^*=\sum_{j\in N_n}| z_j|,\ z=(z_1,z_2,...,z_n)^T,$$

т.е. $\| z\|^*$ – линейная норма l_1.

Следуя [5], радиусом T$_2$-устойчивости (в терминологии [12, 13, 47] – радиусом сильной квазиустойчивости) задачи $Z_m^s(R)$ назовем число

$$\rho_m^s(R)=\begin{cases}\sup\Xi, & \text{если}\quad \Xi\ne\varnothing,\\ 0, & \text{если}\quad \Xi=\varnothing,\end{cases}$$

где

$$\Xi=\left\{\varepsilon>0:\ \exists x\in P^s(R)\ \ \forall R'\in\Omega(\varepsilon)\ \ \left(x\in P^s(R+R')\right)\right\},$$

$$\Omega(\varepsilon)=\left\{R'\in\mathbf{R}^{m\times n\times s}:\ \|R'\|<\varepsilon\right\}.$$

Здесь $\Omega(\varepsilon)$ – множество возмущающих матриц R' с сечениями $R'_k\in\mathbf{R}^{m\times n},\ k\in N_s$; $P^s(R+R')$ – множество Парето возмущенной задачи $Z_m^s(R+R'), \| R'\|$ – норма матрицы $R'=[r'_{ijk}]$.

Таким образом, радиус T$_2$-устойчивости – это предельный уровень таких возмущений элементов матрицы R в метрическом пространстве $\mathbf{R}^{m\times n\times s}$, для каждого из которых в возмущенной задаче $Z_m^s(R+R')$ сохраняется парето-оптимальность некоторого (“самого устойчивого”) портфеля задачи.

Замечание 1. Если ввести понятие радиуса устойчивости парето-оптимального портфеля $x \in P^s(R)$ задачи $Z_m^s(R)$ по формуле

$$\rho_m^s(x,R)=\begin{cases}\sup \Xi(x), & \text{если} \quad \Xi(x)\neq\varnothing,\\ 0, & \text{если} \quad \Xi(x)=\varnothing,\end{cases}$$

где

$$\Xi(x)=\left\{\varepsilon>0:\ \forall R'\in\Omega(\varepsilon) \quad \left(x\in P^s(R+R')\right)\right\},$$

то очевидно, что

$$\rho_m^s(R)=\max\{\rho_m^s(x,R)\ :\ x\in P^s(R)\}.$$

Замечание 2. Радиус T2-устойчивости можно определить, используя известное [5, 46, 52] понятие ядра устойчивости. Действительно, легко видеть, что

$$\rho_m^s(R)=\sup\{\varepsilon>0\ :\ Ker^s(R,\varepsilon)\neq\varnothing\},$$

где

$$Ker^s(R,\varepsilon)=\{x\in P^s(R)\ :\ \forall R'\in\Omega(\varepsilon) \quad \left(x\in P^s(R+R')\right)\}.$$

Последнее множество называется ядром ε-устойчивости задачи $Z_m^s(R)$, а множество

$$Ker^s(R)=\{x\in P^s(R)\ :\ \exists\varepsilon>0\ \ \forall R'\in\Omega(\varepsilon) \quad \left(x\in P^s(R+R')\right)\}$$

– ядром устойчивости задачи. Таким образом, задача $Z_m^s(R)$ T2-устойчива $(\rho_m^s(R)>0)$ тогда и только тогда, когда ее ядро устойчивости непусто.

3. Оценки радиуса устойчивости. Положим

$$\varphi=\varphi_m^s(R)=\max_{x'\in P^S(R)}\ \min_{x\in X\setminus\{x'\}}\ \max_{k\in N_S}\ \frac{g_k(x,x',R_k)}{\|x+x'\|^*},$$

$$\psi=\psi_m^s(R)=\max_{x'\in P^S(R)}\ \min_{x\in X\setminus\{x'\}}\ \max_{k\in N_S}\ \frac{g_k(x,x',R_k)}{\|x-x'\|^*}.$$

Здесь

$$g_k(x,x',R_k)=f_k(x,R_k)-f_k(x,R_k)=$$

$$=\max_{i\in N_m} r_{ik}x-\max_{i\in N_m} r_{ik}x'=\min_{i'\in N_m}\max_{i\in N_m}\left(r_{ik}x-r_{i'k}x'\right),\quad k\in N_s.$$

Теорема 1. При любых числах $s,m\in\mathbf{N}$ для радиуса T2-устойчивости $\rho_m^S(R)$ задачи $Z_m^s(R)$ справедливы следующие оценки

$$\varphi_m^s(R)\le\rho_m^s(R)\le\psi_m^s(R).$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$\psi\ge\varphi\ge 0.$$

Для доказательства теоремы 1 вначале убедимся в справедливости нижней оценки, т.е. неравенства $\rho_m^s(R)\ge\varphi.$ Это неравенство очевидно, если $\varphi=0.$

Пусть $\varphi>0.$ Будем предполагать, что возмущающая матрица $R'=[r'_{ijk}]\in\mathbf{R}^{m\times n\times s}$ с сечениями $R'_k,\ k\in N_s,$ принадлежит множеству $\Omega(\varphi).$ Тогда согласно определения числа φ

справедлива формула

$$\exists x^0 \in P^s(R) \quad \forall x \in X \setminus \{x^0\} \quad \exists q \in N_s \quad \left(\frac{g_q(x, x^0, R_q)}{\| x - x^0 \|^*} \geq \varphi > \| R' \| \geq \| R'_q \| \right).$$

Отсюда ввиду (2.1) и (2.2) имеем

$$g_q(x, x^0, R_q + R'_q) = f_q(x, R_q + R'_q) - f_q(x^0, R_q + R'_q) =$$
$$= \max_{i \in N_m} (r_{iq} + r'_{iq})x - \max_{i' \in N_m} (r_{i'q} + r'_{i'q})x^0 = \min_{i' \in N_m} \max_{i \in N_m} (r_{iq}x - r_{i'q}x^0 + r'_{iq}x - r'_{i'q}x^0) \geq$$
$$\geq \min_{i' \in N_m} \max_{i \in N_m} (r_{iq}x - r_{i'q}x^0) - \| R'_q \| \| x + x^0 \|^* = g_q(x, x^0, R_q) - \| R'_q \| \| x + x^0 \|^* > 0.$$

В результате заключаем, что верна формула

$$\forall x \in X \setminus \{x^0\} \quad \forall R' \in \Omega(\varphi) \quad \left(x^0 \underset{R+R'}{\not\succ} x \right).$$

Это означает, что портфель $x^0 \in P^s(R + R')$ при любой возмущающей матрице $R' \in \Omega(\varphi)$.

Следовательно, $\rho_m^s(R) \geq \varphi$.

Далее докажем неравенство $\rho_m^s(R) \leq \psi$.

В соответствии с определением числа ψ верна формула

$$\forall x' \in P^s(R) \quad \exists x^0 \in X \setminus \{x'\} \quad \forall k \in N_s \quad \left(\psi \| x^0 - x' \|^* \geq g_k(x^0, x', R_k) \right). \tag{3.1}$$

Далее, полагая $\varepsilon > \psi$, зададим элементы r_{ijk}^0 любого k-го сечения R_k^0, $k \in N_s$, возмущающей матрицы $R^0 = [r_{ijk}^0] \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$ по правилу

$$r_{ijk}^0 = \begin{cases} -\delta, & \text{если } i \in N_m, \ x_j^0 = 1, \\ \delta, & \text{если } i \in N_m, \ x_j^0 = 0, \end{cases}$$

где

$$\psi < \delta < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Тогда имеем

$$\| R^0 \| = \| R_k^0 \| = \| r_{ik}^0 \| = \delta, \quad i \in N_m, \quad k \in N_s.$$

Это значит, что $R^0 \in \Omega(\varepsilon)$. Кроме того, все строки r_{ik}^0, $i \in N_m$, любого сечения R_k^0, $k \in N_s$, одинаковы и состоят из компонент δ и $-\delta$. Поэтому, обозначая $c = r_{ik}^0$, $i \in N_m$, $k \in N_s$, получаем равенства

$$c(x^0 - x') = -\delta \| x^0 - x' \|^*,$$
$$\| c \| = \delta.$$

Отсюда с учетом (3.1) и (3.2) для любого индекса $k \in N_s$ выводим

$$g_k(x^0, x', R_k + R_k^0) = f_k(x^0, R_k + R_k^0) - f_k(x', R_k + R_k^0) = \max_{i \in N_m} (r_{ik} + c)x^0 - \max_{i' \in N_m} (r_{ik} + c)x' =$$
$$= \min_{i' \in N_m} \max_{i \in N_m} \left(r_{ik}x^0 - r_{i'k}x' + c(x^0 - x') \right) = \max_{i \in N_m} r_{ik}x^0 - \max_{i \in N_m} r_{ik}x' + c(x^0 - x') =$$
$$= g_k(x^0, x', R_k) + c(x^0 - x') \leq \psi \| x^0 - x' \|^* - \delta \| x^0 - x' \|^* = (\psi - \delta) \| x^0 - x' \|^* < 0.$$

Резюмируя, получаем

$$\forall x' \in P^s(R) \quad \forall \varepsilon > \psi \quad \exists R^0 \in \Omega(\varepsilon) \quad \left(x' \notin P^s(R + R^0) \right).$$

Следовательно, $\rho_m^s(R) \leq \psi$.

Теорема 1 доказана.

4. Достижимость оценок. Верхняя оценка $\psi^s(R)$ радиуса T2-устойчивости, установленная теоремой 1, является достижимой. Действительно, пусть $m = 1.$ Тогда наша задача превращается в многокритериальную задачу $Z_1^s(R)$ булева программирования с линейными критериями

$$R_k x \to \min_{x \in X}, \ k \in N_s,$$

где $R_k \in \mathbf{R}^n$ – k-я строка матрицы $R \in \mathbf{R}^{s \times n}$.

Этот случай можно интерпретировать как ситуацию, при которой состояние финансового рынка не вызывает сомнений.

В этом линейном случае верхняя оценка принимает вид

$$\rho_1^s(R) \le \psi_1^s(R) = \max_{x' \in P^S(R)} \ \min_{x \in X \setminus \{x'\}} \ \max_{k \in N_S} \frac{R_k(x - x')}{\|x - x'\|^*}.$$

Как известно [5, 13, 46, 47], правая часть этого соотношения является выражением для радиуса T2-устойчивости задачи $Z_1^s(R)$. Поэтому в случае, когда $m = 1,$ справедлива формула

$$\rho_1^s(R) = \psi_1^s(R),$$

что свидетельствует о достижимости верхней оценки. Отметим, что приведенная формула верна и для многокритериальной задачи целочисленного линейного программирования [5, 13].

Легко также увидеть, что и нижняя оценка $\varphi_m^s(R)$ достижима. Действительно, пусть для любых портфелей $x' \in P^s(R)$ и $x \in X \setminus \{x'\}$ выполняется равенство

$$\| x + x' \|^* = \| x - x' \|^* .$$

Тогда получаем

$$\rho_m^s(R) = \varphi_m^s(R) = \psi_m^s(R).$$

Справедлива также следующая теорема, свидетельствующая о том, что радиус $\rho_m^s(R)$ может быть равен нижней положительной оценке $\varphi_m^s(R)$, не совпадая с верхней оценкой $\psi_m^s(R).$

Теорема 2. Существует такой класс задач $Z_m^s(R),$ что для радиуса T2-устойчивости $\rho_m^s(R)$ справедливы соотношения

$$0 < \rho_m^s(R) = \varphi_m^s(R) < \psi_m^s(R). \tag{4.1}$$

Доказательство. Рассмотри класс задач $Z_m^s(R),$ для которых выполняются условия

$$X = \{x^0, \tilde{x}\} \subset \mathbf{E}^n,$$

$$\Delta = \| x^0 + \tilde{x} \|^* - \| x^0 - \tilde{x} \|^* > 0,$$

$$f_1(x^0, R_1) < f_1(\tilde{x}, R_1),$$

$$f_k(x^0, R_k) = f_k(\tilde{x}, R_k), \ i \in N_s \setminus \{1\}, \tag{4.2}$$

$$\left(r_{i(\tilde{x})1} - r_{i(x^0)1} \right) \tilde{x} > \varphi \Delta, \tag{4.3}$$

где

$$i(\tilde{x}) = \arg\max\{r_{i1}\tilde{x} \ : \ i \in N_m\},$$

$$i(x^0) = \arg\max\{r_{i1}x^0 \ : \ i \in N_m\}.$$

Тогда очевидны соотношения

$$\varphi_m^s(R) < \psi_m^s(R), \tag{4.4}$$

$$g_1(\tilde{x}, x^0, R_1) = \varphi \| x^0 + \tilde{x} \|^* > 0, \tag{4.5}$$

$$i(\tilde{x}) \neq i(x^0).$$

Для любого числа $\varepsilon > \varphi$ зададим элементы возмущающей матрицы $R^0 = [r_{ijk}^0] \in \mathbf{R}^{m\times n\times s}$ с сечениями $R_k^0,\ k \in N_s$, по правилу

$$r_{ijk}^0 = \begin{cases} \delta, & \text{если } i = i(x^0),\ x_j^0 = 1,\ k = 1, \\ -\delta, & \text{если } i = i(x^0),\ x_j^0 = 0,\ k = 1, \\ -\delta, & \text{если } i \in N_m \setminus \{i(x^0)\},\ \tilde{x}_j = 1,\ k = 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{4.6}$$

где

$$\varphi < \delta < \min\left\{ \varepsilon,\ \frac{1}{\Delta}\left(r_{i(\tilde{x})1} - r_{i(x^0)1} \right)\tilde{x} \right\}. \tag{4.7}$$

Заметим, что последнее неравенство корректно благодаря (4.3).

Согласно строению возмущающей матрицы R^0 имеем

$$r_{i(x^0)1}^0 x^0 = \delta \| x^0 \|^*, \tag{4.8}$$

$$r_{i1}^0 \tilde{x} = -\delta \| \tilde{x} \|^*,\ i \in N_m \setminus \{i(x^0)\}, \tag{4.9}$$

$$\| R_1^0 \| = \| R^0 \| = \delta,\ R^0 \in \Omega(\varepsilon).$$

Кроме того, легко видеть, что выполняются равенства

$$r_{i(x^0)1}^0 \tilde{x} = \delta(\Delta - \| \tilde{x} \|^*), \tag{4.10}$$

$$r_{i1}^0 x^0 = -\delta \Delta / 2,\ i \in N_m \setminus \{i(x^0)\}. \tag{4.11}$$

Действительно, если ввести обозначения

$$J_1 = \{ j \in N_n\ :\ x_j^0 = \tilde{x}_j = 1 \},$$

$$J_2 = \{ j \in N_n\ :\ x_j^0 = 0,\ \tilde{x}_j = 1 \},$$

то очевидны равенства

$$| J_1 | = \Delta / 2,$$

$$| J_2 | = \| \tilde{x} \|^* - \Delta / 2,$$

$$r_{i(x^0)1}^0 \tilde{x} = \delta(| J_1 | - | J_2 |),$$

$$r_{i1}^0 x^0 = -\delta | J_1 |,\quad i \in N_m \setminus \{i(x^0)\},$$

из которых вытекают равенства (4.10) и (4.11).

В силу строения возмущающей матрицы R^0 с учетом (4.2) справедливы равенства

$$g_k(\tilde{x}, x^0, R_k + R_k^0) = g_k(\tilde{x}, x^0, R_k) = 0,\ i \in N_s \setminus \{1\}. \tag{4.12}$$

Теперь покажем, что

$$g_1(\tilde{x}, x^0, R_1 + R_1^0) < 0. \tag{4.13}$$

Согласно (4.8) и (4.11) имеем

$$f_1(\tilde{x}, R_1 + R_1^0) = \max_{i \in N_m}(r_{i1} + r_{i1}^0) x^0 = f_1(x^0, R_1) + \delta \| x^0 \|^*. \tag{4.14}$$

Далее убедимся в справедливости равенства

$$f_1(\tilde{x}, R_1 + R_1^0) = f_1(\tilde{x}, R_1) - \delta \| \tilde{x} \|^* . \tag{4.15}$$

Из (4.9) и неравенства $i(\tilde{x}) \neq i(x^0)$ следует, что

$$f_1(\tilde{x}, R_1 + R_1^0) = \max\left\{(r_{i(\tilde{x})1} + r^0_{i(\tilde{x})1})\tilde{x},\ \max_{i \neq i(\tilde{x})}(r_{i1} + r^0_{i1})\tilde{x}\right\} =$$

$$= \max\left\{ f_1(\tilde{x}, R_1) - \delta \| \tilde{x} \|^*,\ \max_{i \neq i(\tilde{x})}(r_{i1} + r^0_{i1})\tilde{x}\right\}.$$

Поэтому с учетом очевидных ввиду (4.9) соотношений

$$f_1(\tilde{x}, R_1) - \delta \| \tilde{x} \|^* = \max_{i \in N_m} r_{i1}\tilde{x} - \delta | \tilde{x} \|^* \geq (r_{i1} + r^0_{i1})\tilde{x}, \quad i \in N_m \setminus \{i(x^0), i(\tilde{x})\},$$

для доказательства (4.15) остается убедиться, что

$$f_1(\tilde{x}, R_1) - \delta \| \tilde{x} \|^* > (r_{i(x^0)1} + r^0_{i(x^0)1})\tilde{x}.$$

Для этого, воспользовавшись (4.7) и (4.10), выводим

$$f_1(\tilde{x}, R_1) - \delta \| \tilde{x} \|^* - (r_{i(x^0)1} + r^0_{i(x^0)1})\tilde{x} = (r_{i(\tilde{x})1} - r_{i(x^0)1})\tilde{x} - \delta \| \tilde{x} \|^* - r^0_{i(x^0)1}\tilde{x} >$$

$$> \delta(\Delta - \| \tilde{x} \|^*) - r^0_{i(x^0)1}\tilde{x} = 0.$$

Наконец, последовательно применяя соотношения (4.14), (4.15), (4.5) и (4.7), получаем

$$g_1(\tilde{x}, x^0, R_1 + R_1^0) = g_1(\tilde{x}, x^0, R_1) - \delta \| \tilde{x} + x^0 \|^* = (\varphi - \delta) \| \tilde{x} + x^0 \|^* < 0.$$

Тем самым доказано неравенство (4.13). Поэтому, учитывая равенство (4.12), заключаем, что верна формула

$$\forall \varepsilon > \varphi \quad \exists R^0 \in \Omega(\varepsilon) \quad \left(x^0 \notin P^s(R + R^0)\right).$$

Поэтому справедливо неравенство $\rho \leq \varphi.$ Следовательно, в силу теоремы 1 $\rho = \varphi,$ а, учитывая неравенство (4.4), убеждаемся в справедливости соотношений (4.1).

Теорема 2 доказана.

Рассмотрим числовой пример, иллюстрирующий утверждение теоремы 2, т.е. существование радиуса, равного нижней оценке.

Пример. Пусть $m = 2,\ n = 3,\ s = 1,\ X = \{x^0,\ \tilde{x}\},$

$$x^0 = (1, 1, 0),$$
$$\tilde{x} = (0, 1, 1)$$

и матрица

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

со строками R_1 и R_2. Тогда

$$\Delta = \| \tilde{x} + x^0 \|^* - \| \tilde{x} - x^0 \|^* = 2,$$
$$f(\tilde{x}, R) = 4,\ f(x^0, R) = 0,$$
$$i(\tilde{x}) = 2,\ i(x^0) = 1.$$

Поэтому

$$P^1(R) = \{x^0\},\ \tilde{x} \not\in P^1(R),$$
$$\varphi = \varphi_2^1(R) = 1,\ \psi = \psi_2^1(R) = 2$$

и неравенство (4.3) принимает вид

$$(R_2 - R_1)\tilde{x} = 3 > 2\varphi = 2.$$

Возмущающая матрица R^0 со строками R_1^0 и R_2^1, построенная по правилу (4.6), имеет вид

$$R^0 = \begin{pmatrix} \delta & \delta & -\delta \\ 0 & -\delta & -\delta \end{pmatrix}$$

где $1 < \delta < 1.5$. Поэтому, учитывая равенство

$$R + R^0 = \begin{pmatrix} 1+\delta & -1+\delta & 2-\delta \\ -4 & -\delta & 4-\delta \end{pmatrix},$$

получаем

$$f(x^0, R+R^0) = \max_{i \in N_2} (R_i + R_i^0)x^0 = \max\{2\delta,\ -4-\delta\} = 2\delta,$$

$$f(\tilde{x}, R+R^0) = \max_{i \in N_2} (R_i + R_i^0)\tilde{x} = \max\{1,\ 4-2\delta\} = 4-2\delta.$$

Отсюда на основании неравенства $\delta > 1$ имеем

$$g(\tilde{x}, x^0, R+R^0) = 4(1-\delta) < 0,$$

т.е. $x^0 \notin P^1(R+R^0)$. Следовательно, учитывая соотношения

$$x^0 \in P^1(R),$$

$$\| R^0 \| = \delta > 1 = \varphi,$$

заключаем

$$\varphi_2^1(R) = 1 = \rho_2^1(R) < 2 = \psi_2^1(R),$$

т.е. радиус устойчивости равен нижней оценке и не совпадает с верхней оценкой.

5. Условия устойчивости. Следуя [5], задачу $Z_m^s(R)$ назовем T₂-устойчивой, если ее радиус $\rho_m^s(R) > 0$.

Введем в рассмотрение множество Смейла [53] $Sm^s(R)$ (множество строго эффективных портфелей):

$$Sm^s(R) = \{x \in X \ : \ Sm(x,R) = \varnothing\},$$

где

$$Sm(x,R) = \{x' \in X \setminus \{x\} \ : \ \forall k \in N_s \ \ (g_k(x, x', R_k) > 0)\}.$$

Очевидно, что $Sm^s(R) \subseteq P^s(R)$ при любой матрице R.

Теорема 3. Для задачи $Z_m^s(R)$ следующие утверждения эквивалентны:

(i) задача T_2-устойчива,

(ii) $Sm^s(R) \neq \varnothing$,

(iii) $\varphi^s(R) > 0$,

(iv) $Ker^s(R) \neq \varnothing$.

Доказательство. (i)$\Rightarrow$(ii). Предположим, что задача $Z_m^s(R)$ T_2-устойчива, но $Sm^s(R) = \varnothing$. Тогда справедлива формула

$$\forall x' \in P^s(R) \quad \exists x \in X \setminus \{x'\} \quad \forall k \in N_s \quad (g_k(x, x', R_k) = 0).$$

Следовательно, $\psi^s(R) = 0$ и согласно теореме 1 $\rho_m^s(R) = 0$, что противоречит условию задачи.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Если $Sm^s(R) \neq \varnothing$, то очевидна формула

$$\exists x' \in P^s(R) \quad \forall x \in X \setminus \{x\} \quad \exists k \in N_s \quad (g_k(x, x', R_k) > 0).$$

Следовательно, $\varphi^s(R) > 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Эта импликация согласно теореме 1 очевидна.

(i) $\Leftrightarrow$ (iv). См. замечание 2.

Теорема 3 доказана.

Замечание 3. В силу эквивалентности любых двух норм в конечномерном линейном пространстве (см., например, [54], стр. 143) результаты теоремы 3 справедливы для любых норм в пространстве $\mathbf{R}^{m\times n\times s}$ параметров задачи $Z_m^s(R)$.

6. Выводы. Желания инвестора минимизировать различные виды рисков при выборе инвестиционного портфеля служат веским основанием необходимости применения многокритериального подхода к экономико-математическому моделированию рисков. Этот подход позволяет использовать методы теории выбора и принятия решений в условиях многокритериальности [55, 56]. В данной работе при построении многокритериальной модели управления инвестиционными рисками использованы целевые функции “узкого места” Сэвиджа, которые в условиях нестабильности и неопределенности финансового рынка позволяют выбирать тот портфель, при котором величина суммарного риска принимает минимальное значение в самой неблагополучной ситуации, а именно тогда, когда риск минимален. Другой тип неопределенности появляется в связи с применением в качестве исходной информации статистических и экспертных оценок различных видов рисков, точность и достоверность которых всегда вызывает сомнение. В этой связи возникает потребность в проведении постоптимального анализа, состоящего в выявлении радиуса T_2-устойчивости рассматриваемой многокритериальной инвестиционной задачи. В результате проведения такого анализа получены следующие результаты: 1) найдены нижняя и верхняя оценки радиуса T_2-устойчивости; 2) доказана достижимость этих оценок; 3) приведен иллюстрационный числовой пример.

Литература

1. Корбут А. А., Финкельштей Ю. Ю. Дискретное программирование. М.: Наука. 1969.
2. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука. 1981.
3. Емеличев В. А., Комлик В. И. Метод построения последовательности планов для решения задач дискретной оптимизации. М.: Наука. 1981.
4. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. М.: Мир. 1991.
5. Сергиенко И. В., Шило В. П. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. Киев: Наук. думка. 2003
6. Шевченко В. Н. Качественные вопросы целочисленного программирования. М.: Наука. 1995.
7. Мамедов К. Ш. Методы решения различных классов задач дискретной оптимизации. Баку: Элм. 2011.
8. Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наук. думка. 1995.
9. Sotskov Yu. N., Sotskova N. Yu., Lai T.-C., Werner F. Scheduling under uncertainty. Theory and algorithms. Minsk: Belorusskaya nauka. 2010.
10. Sotskov Yu. N., Leontev V. K., Gordeev E. N. Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization // Discrete Appl. Math. — 1995. — V. 58, No. 2. — P. 169–190.
11. Sotskov Yu. N., Tanaev V. S., Werner F. Stability radius of an optimal schedule: a survey and recent developments // Industrial applications of combinatorial optimization. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. 1998. — P. 72–108.
12. Emelichev V. A., Girlich E, Nikulin Yu. V., Podkopaev D. P. Stability and regularization of vector problems of integer linear programming // Optimization. — 2002. — V. 51, No. 4. — P. 645–676.
13. Емеличев В. А., Подкопаев Д. П. Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2001. — Т. 8, № 1. — С. 47–69.
14. Greenberg H. J. A bibliography for the development of an intelligent mathematical programming system // Annals of Operations Research. — 1996. — V. 65, No. 1. — P. 55–90.
15. Greenberg H. J. An annotated bibliography for post-solution analysis in mixed integer and combinatorial optimization. Advances in Computational and Stochastic Optimization, Logic Programming, and Heuristic Search: Interfaces in Computer Science and Operations Research, Operations Research / Computer Science Interfaces Series / D.L.

Woodruff (Ed.). — Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers. 1998. — P. 97–148.
16. Ehrgott M., Gandibleux X. A survey and annotated bibliography of multiobjective combinatorial optimization // Operation Research Spectrum. 2000. — V. 22, No. 4. — P. 425–460.
17. Емеличев В. А., Кравцов М. К., Подкопаев Д. П. О квазиустойчивости траекторных задач векторной оптимизации // Мат. заметки. 1998. — Т. 63, вып. 1. — С. 21–27.
18. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г., Леонович А. М. Устойчивость в векторных комбинаторных задачах оптимизации // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 2. — С. 79–92.
19. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г. О квазиустойчивости векторной булевой задачи минимизации модулей линейных функций // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. — 2005. — № 4. — С. 55–58.
20. Гуревский Е. Е., Емеличев В. А., Кузьмин К. Г. О двух типах устойчивости лексикографической задачи минимизации модулей линейных функции // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 4. — С. 127–132.
21. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г. Критерии устойчивости векторных комбинаторных задач на “узкие места” в терминах бинарных отношений // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 3. — С. 103–111.
22. Воденников А. Г., Емеличев В. А., Кузьмин К. Г. Об одном типе устойчивости векторной комбинаторной задачи размещения // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. — 2007. — Т. 14, № 2. — С. 32–40.
23. Emelichev V. A., Gurevsky E. E., Kuzmin K. G. On stability of some lexicographic integer optimization problem // Control and Cybernetics. — 2010. — V. 39, No. 3. — P. 35–44.
24. Emelichev V. A., Karelkina O. V., Kuzmin K. G. Qualitative stability analysis of multicriteria combinatorial minimin problem // Control and Cybernetics. — 2012. — V. 41, No. 1. — P. 57–79.
25. Лебедева Т. Т., Семенова Н. В., Сергиенко Т. И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множества оптимальных и неоптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 4. — С. 90–100.
26. Лебедева Т. Т., Сергиенко Т. И. Разные типы устойчивости векторной задачи целочисленной оптимизации: общий подход // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 3. — С. 142–148.
27. Libura M., van der Pourt E. S., Sierksma G., van der Veen J. A. A. Stability aspects of the traveling salesman problem based on k-best solutions // Discrete Applied Mathematics. — 1998. — V. 87. — P. 159–185.
28. Сотсков Ю. Н., Сотскова Н. Ю. Теория расписаний. Системы с неопределёнными числовыми параметрами. Минск: ОИПИ НАН Беларуси. 2004.
29. Емеличев В. А., Кравцов М. К. Об устойчивости в траекторных задачах векторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 1995. — № 4. — С. 137–143.
30. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г. Общий подход к исследованию устойчивости Парето-оптимального решения векторной задачи целочисленного линейного программирования // Дискретная математика. — 2007. — Т. 19, вып. 3. — С. 79–83.
31. Emelichev V., Podkopaev D. Quantitative stability analysis for vector problems of 0-1 programming // Discrete Optimization. — 2010. — V. 7, No. 1–2. — P. 48–63.
32. Гордеев Э. Н. Алгоритмы полиномиальной сложности для вычисления радиуса устойчивости в двух классах траекторных задач // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1987. — Т. 27, № 7. — С. 984–992.
33. Chakravarti N., Wagelmans A. Calculation of stability radius for combinatorial optimization problems // Operations Research Letters. — 1998. — V. 23, No. 1. — P. 1–7.
34. Гордеев Э. Н. Исследование устойчивости задачи о кратчайшем остове в метрике l_1 // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1999. — Т. 39, № 5. — С. 770–778.
35. Гордеев Э. Н. Исследование устойчивости в оптимизационных задачах на матроидах в метрике l_1 // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 2. — С. 132–144.
36. Roland J., Smet Y., Figueira J. On the calculation of stability radius for multi-objective combinatorial optimization problems by inverse optimization // 4or Journal Operations Research. — 2012. — V. 10, No. 4. — P. 379–389.
37. Емеличев В. А., Коротков В. В., Кузьмин К. Г. Многокритериальная инвестиционная задача в условиях неопределённости и риска // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2011. — № 6. — С. 157–164.
38. Емеличев В. А., Коротков В. В. Устойчивость векторной инвестиционной булевой задачи с критериями Вальда // Дискретная математика. — 2012. — Т. 24, № 3. — С. 3–16.
39. Емеличев В. А., Коротков В. В. Об устойчивости оптимального портфеля инвестиционной задачи Марковица с упорядоченными критериями рисков Сэвиджа // Изв. НАН Азербайджана, сер. физ.-тех. и матем. наук. – 2011. – Т. 31, № 6. – С. 27–34.
40. Емеличев В. А., Коротков В. В. О мере устойчивости многокритериальной инвестиционной задачи с критериями эффективности Вальда // Изв. НАН Азербайджана, сер. физ.-тех. и матем. наук. — 2012. — Т. 32, № 6. — С. 88–98.
41. Бухтояров С. Е., Емеличев В. А. Оценки радиуса устойчивости задачи портфельной оптимизации с

критериями крайнего оптимизма и крайнего пессимизма // Изв. НАН Азербайджана, сер. физ.-тех. и матем. наук. — 2014. — Т. 34, № 6. — С. 50–57.
42. Емеличев В. А., Устилко Е. В. Постоптимальный анализ инвестиционной задачи с критериями крайнего оптимизма // Прикладная дискретная математика. — 2014. — № 3. — С. 117–123.
43. Bukhtoyarov S. E., Emelichev V. A. On the stability measure of solutions to a vector version of an investment problem // J. of Applied and Industrial Mathematics. — 2015. — V. 9, No. 3. — P. 328–334.
44. Emelichev V. A., Kotov V. M., Kuzmin K. G., Lebedeva T. T., Semenova N. V., Sergienko T. I. Stability and effective algorithms for solving multiobjective discrete optimization problems with incomplete information. // J. Automation and Information Sciences. — 2014. — V. 26, No. 2. — 27–41.
45. Леонтьев В. К. Устойчивость в линейных дискретных задачах // Проблемы киберентики. — М.: Наука, 1979. — Вып. 35. — С. 169–184.
46. Ефимчик Н. Е., Подкопаев Д. П. О ядре и радиусе устойчивости в траекторной задаче векторной дискретной оптимизации // Вестник БГУ. Сер. 1. — 1996. — № 1. — С. 48–52.
47. Emelichev V. A., Nikulin Yu. V. Numerical measure of strong stability and strong quasistability in the vector problem of integer linear programming // Computer Science Journal of Moldova. — 1999. — V. 7, No. 1. — P. 105–117.
48. Markowitz H. M. Portfolio selection: efficient diversification of investments. Oxford: Blackwell Publ. 1991.
49. Savage L. J. The foundations of statistics. New York: Dover Publ. 1972.
50. Du D., Pardalos P. (eds.) Minimax and Applications. Dordrecht: Kluwer.1995.
51. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. М.: Наука. 1972.
52. Емеличев В. А., Гуревский Е. Е. О ядре устойчивости многокритериальной комбинаторной минимаксной задачи // Дискрет. анализ и исслед. операций . — 2008. — Т. 15, № 5. — С. 6–19.
53. Smale S. Global analysis and economics, V. Pareto theory with constrains // J. Math. Econ. — 1974. — V. 1, No. 3. — P. 213–221.
54. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит. 2009.
55. Yu P. I. Multiple-criteria decision-making: concepts, techniques, and extensions. New York: Plenum Press. 1985.
56. Keeny R. I., Raiffa H. Decisions with multiple objective preferences and value tradeoffs. New York: John Wiley and Sons. 1976.

UOT 519.8

S.E. Buxtoyarov, V.A. Yemeliçev

Bir diskret çoxkriteriyalı investisiya məsələsinin postoptimal təhlili

Markoviçin portfel nəzəriyyəsi əsasında Pareto çoxluğunun axtarışından ibarət minimaks Sevic riskli çoxkriteriyalı Bul investisiya məsələsinə baxılmışdır. Məsələnin T_2-dayanıqlı radiusu üçün nail oluna bilən aşağı və yuxarı sərhədlər tapılmışdır.

Açar sözlər: çoxkriteriyalılıq, Bul investisiya məsələsi, risklər, Sevic kriteriyası, Pareto çoxluğu, dayanıqlıq radiusu, T_2-dayanıqlıq, Çebişev norması

S.E. Bukhtoyarov, V.A. Emelichev

Post-optimal analysis of a discrete multiobjective investment problem

A multiobjective Boolean investment problem with Savage's minmax risk criteria is considered. The problem consists of finding the Pareto set. Lower and upper attainable estimates of the problem T_2-stability radius are obtained.

Keywords: multicriteriality, investment Boolean problem, risks, Savage's criterion, the Pareto set, stability radius, T_2-stability, Chebyshev norm

Белорусский государственный университет Представлено 02.01.2017