Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXVII, No.6, 2017
www.icp.az/2017/6-01.pdf

УДК 519.2

К.Б. МАНСИМОВ, Р.О. МАСТАЛИЕВ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Решается задача получения явного представления решений линейных стохастических уравнений с запаздыванием. Решение представляется интегральной формулой Коши.

Ключевые слова: линейное стохастическое уравнение с запаздыванием, матрица Коши, метод вариации постоянных, представление решения

1. Введение. Линейные стохастические дифференциальные уравнения занимают особое место как в теории стохастических систем, так и в их приложениях в механике, электротехнике и других областях.

В работах [1-2] и др. рассматриваются линейные стохастические дифференциальные уравнения и получен аналог формулы Коши для решений таких дифференциальных уравнений.

Настоящая работа посвящена исследованию стохастического линейного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом и установлению аналога формулы Коши для решения этого уравнения, который играет важную роль, например, при выводе необходимых условий оптимальности в процессах, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему линейных стохастических дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в смысле Ито:

$$dx(t) = \big[A(t)x(t) + B(t)x\big(h(t)\big) + C(t)\big]dt + \\ +\big[D(t)x(t) + E(t)x\big(h(t)\big)\big]dw(t), t \in (t_0, t_1], \tag{2.1}$$

с начальными условиями:

$$x(t) = \varphi(t), t \in E_{t_0} = [h(t_0), t_0), x(t_0) = x_0. \tag{2.2}$$

Здесь $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T -$ векторный случайный процесс, $w(t) = (w_1(t), w_2(t), \dots, w_n(t))^T -$ вектор из независимых стандартных винеровских процессов, $A(t), B(t), D(t), E(t) -$ заданные $n \times n -$ матрицы, а $C(t) -$ заданная n мерная вектор-функция, предполагаются неслучайными, непрерывными или квадратично интегрируемыми на $[t_0, t_1]$, $h(t) < t -$ заданная непрерывно-дифференцируемая скалярная функция, причем $\dot{h}(t) > 0, \varphi(t) -$ непрерывная на E_{t_0} начальная вектор-функция, а $x_0 -$ известный вектор начального состояния.

Нашей целью является получение представления решения задачи (2.1)-(2.2) при помощи аналога матрицы Коши.

3. Основной результат. Наряду с (2.1) рассмотрим однородное уравнение

$$dx(t) = \big[A(t)x(t) + B(t)x\big(h(t)\big)\big]dt + \\ +\big[D(t)x(t) + E(t)x\big(h(t)\big)\big]dw(t), t \in (t_0, t_1],$$

и соответствующее ему матричное стохастическое дифференциальное уравнение

$$dR(t) = \big[A(t)R(t) + B(t)R\big(h(t)\big)\big]dt + \\ +\big[D(t)R(t) + E(t)R\big(h(t)\big)\big]dw(t), t \in (t_0, t_1], \tag{3.1}$$

$$R(t) = I, t \in E_{t_0} \cup t_0, I - \text{единичная матрица.}$$

Матричную функцию $R(t) \in R^{n\times n}$ назовем фундаментальной матрицей системы (2.1)-(2.2). Она с вероятностью единица удовлетворяет условию $S(t) = detR(t) \neq 0$ при всех t.

Для решения поставленной задачи применим метод вариации постоянных. Метод вариации постоянных состоит в том, что полагая

$$x(t) = R(t)y(t),$$

и $y(t)$ рассматривается в качестве новой неизвестной вместо $x(t)$.

Ясно, что имеет место равенство

$$dx(t) = dR(t)y(t) + R(t)dy(t) + dR(t)dy(t), \tag{3.2}$$

которое получается с помощью формулы Ито [3].

Из (3.2), в силу (3.1), получаем

$$dx(t) = A(t)R(t)y(t)dt + B(t)R\big(h(t)\big)y(t)dt +$$
$$+D(t)R(t)y(t)dw(t) + E(t)R\big(h(t)\big)y(t)dw(t) + R(t)dy(t) + dR(t)dy(t).$$

Подставляя это выражение $dx(t)$ в (2.1), и опять учитывая (3.1), будем иметь

$$A(t)R(t)y(t)dt + B(t)R\big(h(t)\big)y(t)dt +$$
$$+D(t)R(t)y(t)dw(t) + E(t)R\big(h(t)\big)y(t)dw(t) + R(t)dy(t) + A(t)R(t)dy(t)dt +$$
$$+B(t)R\big(h(t)\big)dy(t)dt + D(t)R(t)dy(t)dw(t) + E(t)R\big(h(t)\big)dy(t)dw(t) =$$
$$= A(t)R(t)y(t)dt + B(t)R\big(h(t)\big)y\big(h(t)\big)dt + C(t)dt + D(t)R(t)y(t)dw(t) +$$
$$+E(t)R\big(h(t)\big)y\big(h(t)\big)dw(t).$$

Отсюда, после сокращения подобных членов, получим

$$\big(I + A(t)dt + D(t)dw(t)\big)R(t)dy(t) =$$
$$= C(t)dt + B(t)R(h(t))y(h(t)dt + E(t)R\big(h(t)\big)y\big(h(t)\big)dw(t) -$$
$$-B(t)R\big(h(t)\big)y(t)dt - E(t)R\big(h(t)\big)dy(t)dw(t),$$

или

$$R(t)dy(t) = (I + A(t)dt + D(t)dw(t))^{-1}[C(t)dt + B(t)R\big(h(t)\big)y\big(h(t)\big)dt +$$
$$+E(t)R\big(h(t)\big)y\big(h(t)\big)dw(t) - B(t)R\big(h(t)\big)y(t)dt - E(t)R\big(h(t)\big)dy(t)dw(t)]. \tag{3.3}$$

Поскольку (см. напр.[2, с.20]),

$$(I + A(t)dt + D(t)dw(t))^{-1} = I - \big(A(t)dt + D(t)dw(t)\big) + D^2(t)dt,$$

то, учитывая “таблицу умножения” [3, с.107]

$$dw(t) \cdot dw(t) = dt, dt \cdot dt = 0, dw(t) \cdot dt = dt \cdot dw(t) = 0,$$

из (3.3) получаем, что

$$R(t)dy(t) = C(t)dt + B(t)R\big(h(t)\big)y\big(h(t)\big)dt +$$
$$+E(t)R\big(h(t)\big)y\big(h(t)\big)dw(t) - B(t)R\big(h(t)\big)y(t)dt -$$
$$-E(t)R\big(h(t)\big)dy(t)dw(t) - E(t)D(t)R\big(h(t)\big)y\big(h(t)\big)dt.$$

Поэтому

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} R^{-1}(\tau)C(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t} R^{-1}(\tau)B(\tau)\,R\big(h(\tau)\big)y\big(h(\tau)\big)d\tau +$$
$$+\int_{t_0}^{t} R^{-1}(\tau)E(\tau)\,R\big(h(\tau)\big)y\big(h(\tau)\big)dw(\tau) - \int_{t_0}^{t} R^{-1}(\tau)B(\tau)\,R\big(h(\tau)\big)y(\tau)d\tau - \tag{3.4}$$
$$-\int_{t_0}^{t} R^{-1}(\tau)E(\tau)\,R\big(h(\tau)\big)dy(\tau)dw(\tau) - \int_{t_0}^{t} R^{-1}(\tau)E(\tau)\,D(\tau)R\big(h(\tau)\big)y\big(h(\tau)\big)d\tau.$$

Нетрудно доказать, что

$$\int_{t_0}^{t} R^{-1}(\tau)B(\tau)\,R\big(h(\tau)\big)y\big(h(\tau)\big)d\tau =$$

$$= \int_{h(t_0)}^{t_0} R^{-1}(r(\tau))B(r(\tau))\varphi(\tau)\dot{r}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{h(t)} R^{-1}(r(\tau))B(r(\tau))R(\tau)\dot{r}(\tau)y(\tau)d\tau,$$

где $r(t) -$ функция, обратная $h(t)$.

Учитывая это тождество в (3.4) приходим к соотношению

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} R^{-1}(\tau)C(\tau)\,d\tau + \int_{h(t_0)}^{t_0} R^{-1}(r(\tau))B(r(\tau))\varphi(\tau)\dot{r}(\tau)d\tau +$$
$$+ \int_{t_0}^{h(t)} R^{-1}(r(\tau))B(r(\tau))R(\tau)\dot{r}(\tau)y(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} R^{-1}(\tau)E(\tau)\,R\big(h(\tau)\big)y(h(\tau))dw(\tau) -$$
$$- \int_{t_0}^{t} R^{-1}(\tau)B(\tau)\,R\big(h(\tau)\big)y(\tau)d\tau - \int_{t_0}^{t} R^{-1}(\tau)E(\tau)\,R\big(h(\tau)\big)dy(\tau)dw(\tau) - \tag{3.5}$$
$$- \int_{t_0}^{t} R^{-1}(\tau)E(\tau)\,D(\tau)R\big(h(\tau)\big)y\big(h(\tau)\big)d\tau.$$

Введем $(n \times n) -$ матричную функцию

$$F(t,\tau) = \begin{cases} 0, \tau > t, \\ R(t)R^{-1}(\tau), \tau \le t. \end{cases} \tag{3.6}$$

Умножая (3.5) на $R(t)$, получаем

$$x(t) = F(t,t_0)x(t_0) + \int_{h(t_0)}^{t_0} F(t,r(\tau))B(r(\tau))\varphi(\tau)\dot{r}(\tau)d\tau +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} F(t,\tau)C(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{h(t)} R(t)B(\tau)F(h(\tau),\tau)\dot{r}(\tau)y(\tau)d\tau +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} R(t)E(\tau)F(h(\tau),\tau)\,y\big(h(\tau)\big)dw(\tau)d\tau - \int_{t_0}^{t} R(t)B(\tau)F(h(\tau),\tau)\,y(\tau)d\tau -$$
$$- \int_{t_0}^{t} R(t)E(\tau)F(h(\tau),\tau)dy(\tau)\,dw(\tau) - \int_{t_0}^{t} R(t)E(\tau)D(\tau)F(h(\tau),\tau)y\big(h(\tau)\big)\,d\tau.$$

Отсюда, учитывая (3.6), в силу $\tau > h(\tau)$ приходим к соотношению

$$x(t) = F(t,t_0)x(t_0) + \int_{h(t_0)}^{t_0} F(t,r(\tau))B(r(\tau))\varphi(\tau)\dot{r}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} F(t,\tau)C(\tau)\,d\tau.$$

Полученное представление является аналогом формулы Коши для стохастического уравнения (2.1) с начальным условием (2.2).

Отметим, что из формулы (3.1), в силу (3.6), следует, что $F(t,\tau)$ матрица Коши системы (2.1)-(2.2) является решением уравнения

$$dF(t,\tau) = [A(t)F(t,\tau) + B(t)F(h(t),\tau)]dt +$$
$$+[D(t)F(t,\tau) + E(t)F(h(t),\tau)]dw(t), t \in (t_0, t_1], \tag{3.7}$$
$$F(t,t) = I, F(t,\tau) = 0, \tau > t. \tag{3.8}$$

Следовательно, доказано следующее утверждение.

Теорема. Решение стохастического уравнения (2.1) с начальным условием (2.2) можно представить в виде:

$$x(t) = F(t,t_0)x(t_0) + \int_{h(t_0)}^{t_0} F(t,r(\tau))B(r(\tau))\varphi(\tau)\dot{r}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} F(t,\tau)C(\tau)\, d\tau,$$

где матрица Коши $F(t,\tau)$ является решением однородного матричного стохастического дифференциального уравнения (3.7) с начальным условием (3.8).

Замечание. Интегральные представления решения задачи (2.1)-(2.2) в частных случаях $(h(t) = t - \tau,$ и $h(t) = t - \gamma(t))$ приведены соответственно в работах [4, 5] без доказательства.

4. Выводы. Для системы линейных стохастических дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом получен аналог формулы, известной в теории обыкновенных дифференциальных уравнений как формула Коши.

Литература

1. Садовяк А.М., Царьков Е.Ф. Аналог формулы Коши для стохастических дифференциальных уравнений//ТВП, 1973, т.18, вып.2, с.415-417.
2. Шайкин М.Е. Интегральные представления решений линейных стохастических уравнений с мультипликативными возмущениями//АиТ, №4, 2010, с.16-33.
3. Ватанабе С., Икеда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986.
4. Агаева Ч.А. Необходимые условия оптимальности особых управлений в стохастических системах с запаздывающим аргументом. Баку, Деп. в ВИНИТИ, 1990, №3495-890, с.20.
5. Aghayeva Ch.A. Second order necessary condition of optimality for time lag stochastic systems. International Conference 24th MEC-Eur OPT-2010, June 23-26, Izmir, Turkey.

UOT 519.2

K.B. Mənsimov, R.O. Məstəliyev

Gecikən arqumentli xətti stoxastik diferensial tənliklərin həllinin inteqral göstərilişi

Gecikməyə malik xətti stoxastik diferensial tənliyin həllinin inteqral göstərilişi məsələsi həll edilir. Həll Koşinin inteqral düsturu şəkilində təqdim olunur.

Açar sözlər: gecikməyə malik stoxastik xətti diferensial tənliklər, Koşi matrisi, sabitin variyasiyası üsulu, həllin göstərilişi

K.B. Mansimov, R.O. Mastaliyev

Integral representation of the solution to linear stochastic delay differential equations

The problem of obtaining an explicit representation of solutions to linear stochastic delay equations is solved. The solution is represented by the Cauchy integral formula.

Keywords: linear stochastic delay equation, Cauchy matrix, method of variation of constants, solution representation

Институт Систем Управления НАН Азербайджана
Бакинский Государственный Университет
Представлено 14.09.2017