Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXVII, No.6, 2017
www.icp.az/2017/6-04.pdf

UOT 519.852.6

K.Ş. MƏMMƏDOV, A.H. MƏMMƏDOVA

VERİLƏNLƏRİ İNTERVALLAR OLAN TAMƏDƏDLİ PROQRAMLAŞDIRMA MƏSƏLƏSİNİN SUBOPTİMİST VƏ SUBPESSİMİST HƏLLƏRİNİN QURULMASI ÜÇÜN QEYRİ-XƏTTİ CƏRİMƏ ÜSULU VƏ XƏTANIN QİYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ

Verilənləri tamədədli intervallar olan tamədədli proqramlaşdırma məsələsində optimist, pessimist, suboptimist və subpessimist həll anlayışları verilmişdir. Suboptimist və subpessimist həllərin qurulması üçün "qeyri-xətti cərimə" adlı üsul işlənmişdir. Bu üsulun verdiyi həllin optimal həlldən olan xətası qiymətləndirilmişdir. Bu məqsədlə uyğun Laqranj tipli funksiya qurulmuş, göstərilmişdir ki, bu funksiyanın minimal qiyməti məsələnin uyğun olaraq suboptimist və subpessimist qiymətləri üçün yuxarı sərhədlər verir və həmin funksiyanın minimallaşması üçün iki alqoritm işlənmişdir. Müxtəlif böyük ölçülü məsələlər üzərində geniş hesablama eksperimentləri aparılmışdır. Bu eksperimentlər işdə təklif olunmuş üsulların kifayət qədər effektiv olduğunu bir daha təsdiq etmişdir.

Açar sözlər: intervallı tamədədli proqramlaşdırma məsələsi, optimist, pessimist, suboptimist və subpessimist həllər, qeyri-xətti cərimə, Laqranj funksiyası, yuxarı sərhəd, hesablama eksperimentləri

1. Giriş. Verilənləri tamədədli intervallar olan aşağıdakı kimi məsələyə baxaq:

$$\sum_{j=1}^{n}[\underline{c}_j,\overline{c}_j]x_j \to max, \tag{1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n}[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]x_j \le [\underline{b}_i,\overline{b}_i], \qquad (i=\overline{1,m}), \tag{1.2}$$

$$0 \le x_j \le d_j \ , \ x_j \text{ və } d_j - \text{tamdırlar} \ , \qquad \left(j=\overline{1,n}\right) . \tag{1.3}$$

Burada fərz edirik ki, $\underline{c}_j > 0, \overline{c}_j > 0, \underline{a}_{ij} \ge 0, \overline{a}_{ij} \ge 0, \underline{b}_i > 0, \overline{b}_i > 0$ $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$) verilmiş tam ədədlərdir. Qeyd edək ki, (1.1)-(1.3) məsələsinə intervallı tamədədli proqramlaşdırma məsələsi də deyilir [1, s.1629-1636; 2, s.786-791; 3, s.316-324].

(1.1)-(1.3) məsələsinin optimal həlli dedikdə, (1.3) şərtini ödəyən elə $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ vektoru başa düşülür ki, $\forall a_{ij} \in [\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]$, $\forall b_i \in [\underline{b}_i,\overline{b}_i]$ və $\forall c_j \in [\underline{c}_j,\overline{c}_j]$ $(i=\overline{1,m})$, $\left(j=\overline{1,n}\right)$ ədədləri üçün (1.1) funksiyası maksimal qiymət alsın. Aydındır ki, bu məsələnin optimal həllinin tapılması, NP-tam sinfə daxil olan külli miqdarda məsələ həll etməklə bağlıdır. Bu isə heç bir reallığa sığmır.

Keçən əsrin 80-cı illərindən başlayaraq (1.1)-(1.3) məsələsi müxtəlif modellər şəklində tədqiq olunurlar [2, s.786-791; 4, s.25-31; 5, s.42-47; 6, s.170]. Bu işlərdə məsələnin verilənləri ya qeyri dəqiq şəkildə, ya da müəyyən şərtləri ödəyən sinifdən seçilir. Bu zaman baxılan məsələni həll etmək üçün müxtəlif strategiyalar seçilmişdir. Bu strategiyaların mahiyyəti müəlliflərin [7, s.164-173; 8, s. 99-108] işlərində aydınlaşdırılmışdır.

Qeyd edək ki, [8, s.99-108] işində müəlliflər intervallı Bul proqramlaşdırma məsələsinin suboptimist və subpessimist həllərinin qurulması və uyğun xətaların qiymətləndirilməsi məsələsini həll etmişlər. Bu işdə isə həmin üsullar intervallı tamədədli proqramlaşma məsələsi halına ümumiləşdirilmişdir.

(1.1)-(1.3) məsələsində ilkin verilənlər təbii olaraq aşağıdakı şərtləri ödəməlidir. Belə ki,$\forall i, (i=\overline{1,m})$ nömrəsi üçün

$$\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}d_j > \overline{b}_i \ \ , \ \ i=\overline{1,m}$$

olmalıdır. Əks halda $X = (d_1, d_2, \dots d_n)$ vektoru (1.2) sistemini ödədiyindən, bu həll məsələnin optimal həlli olar. Digər tərəfdən müəyyən i_* nömrəsi üçün

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{i_* j} d_j \leq \underline{b}_{i_*}$$

olarsa, həmin bərabərsizlik məhdudiyyət təşkil etmədiyindən onu sistemdən çıxarmaq lazımdır.

Bu məqalədə biz (1.1)-(1.3) məsələsi üçün mümkün həll, optimist, pessimist, suboptimist və subpessimist həll anlayışları vermişik. Suboptimist və subpessimist həllərinin tapılması üçün bir üsul işləmişik. Bundan əlavə (1.1)-(1.3) məsələsi üçün Laqranj tipli funksiya qurmuşuq. Göstərmişik ki, bu funksiyanın minimal qiyməti (1.1)-(1.3) məsələsinın suboptimist və subpessimist qiymətləri üçün uyğun yuxarı sərhədlərdir. Ona görə də qurduğumuz Laqranj tipli funksiyanın minimallaşma alqoritmini işləmişik və nəticədə (1.1)-(1.3) məsələsinin suboptimist və subpessimist həllərinin optimist və pessimist həllərdən olan xətasını qiymətləndirmişik.

2. Məsələnin qoyuluşu. Əvvəlcə (1.1)-(1.3) məsələsinə bir iqtisadi interpretasiya verək. Tutaq ki, müəyyən bir şirkət (firma, müəssisə və s.) sayla ifadə olunan miqdarda n növ məhsul istehsal etməlidir. Hər bir j-ci $\left(j = \overline{1,n}\right)$ növ məhsulun bir vahidinin qiyməti $\left[\underline{c}_j, \overline{c}_j\right]$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$ intervalında yerləşən tam ədədlərdir. Fərz edək ki, bu məhsulların istehsalı üçün $\left[\underline{b}_i, \overline{b}_i\right]$ $(i = \overline{1,m})$ intervalındakı tam ədədlər qədər resurslar (vəsaitlər və s) ayrılmışdır. Tutaq ki, j-ci növ məhsulun bir vahidinin istehsalına i-ci növ resursdan $\left[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}\right]$ $(i = \overline{1,m})$ intervalında yerləşən tam ədədlərdən sərf olunmalıdır. Bu məsələnin riyazi modelini qurmaq üçün x_j $(j = \overline{1,n})$ ilə istehsal olunası j-ci $\left(j = \overline{1,n}\right)$ növ məhsulun miqdarını işarə edək. Aydındır ki, istehsal olunası j-ci $\left(j = \overline{1,n}\right)$ növ məhsulun miqdarı məhdud olmalıdır, yəni $0 \leq x_j \leq d_j, \left(j = \overline{1,n}\right)$ şərti ödənməlidir. Beləliklə, yuxarıdakı işarələmələri nəzərə alsaq, baxılan məsələnin riyazi modeli (1.1)-(1.3) şəklində olar.

Qeyd edək ki, (1.1)-(1.3) məsələsinin əmsallarındakı intervalların əmsalların aşağı və yuxarı sərhədləri üst-üstə düşdükdə xüsusi hal kimi məlum tamədədli proqramlaşdırma məsələsi alınır. Digər tərəfdən tamədədli proqramlaşdırma məsələləri NP-tam sinifdə, yəni "çətin həll olunan məsələlər" sinfində olduğundan onun ümumiləşmiş forması olan (1.1)-(1.3) məsələsi də NP-tam sinifdə olar. Başqa sözlə bu məsələlərin optimal həllinin tapılması üçün polinomial zaman mürəkkəblikli üsullar yoxdur. Qeyd edək ki,(1.1)-(1.3) məsələsində optimal həll anlayışlarının verilməsi praktika nöqteyi nəzərindən düzgün alınmır. Çünki, bir neçə intervallar cəminin maksimal olması və müəyyən intervallar cəminin hər hansı qeyd olunmuş intervallardan böyük olmaması şərti iqtisadi cəhətdən düzgün məna daşımır. Ona görə də (1.1)-(1.3) məsələsi üçün uyğun mümkün həll, optimist, pessimist, suboptimist və subpessimist həll anlayışlarını verib, onların tapılması alqoritmlərini işləmişik.

3. Üsulun nəzəri əsaslandırılması. Hər şeydən əvvəl [7, s.164-173] işinə əsaslanaraq, orada Bul proqlamlaşdırılması məsələsinə görə verilmiş anlayışları tamədədli proqramlaşdırma məsələsi üçün ümumiləşdirək.

Tərif 1. $\forall\, a_{ij} \in \left[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}\right]$ və $\forall\, b_i \in \left[\underline{b}_i, \overline{b}_i\right], (i = \overline{1,m}\,;\ j = \overline{1,n})$ tam ədədləri üçün

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i\,, \qquad (i = \overline{1,m})$$

$$0 \leq x_j \leq d_j\ , \left(j = \overline{1,n}\right)$$

şərtlərini ödəyən istənilən n ölçülü tamədədli $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektoruna (1.1)-(1.3) məsələsinin mümkün həlli deyəcəyik.

Qeyd edək ki, tərif 1-də verilmiş mümkün həll anlayışına görə (1.1)-(1.3) məsələsində optimal həll, optimal qiymət, optimal qiymətin yuxarı sərhəddi və s. anlayışları klassik anlayışlardan fərqli olur. Çünki, (1.2) məhdudiyyət şərtlərinin ödənilməsi üçün bir neçə intervallar cəminin verilmiş $[\underline{b}_i, \overline{b}_i]$, $(i = \overline{1,m})$ intervallarından uyğun olaraq böyük olmaması və eyni zamanda (1.1) funksiyasında uyğun intervallar cəminin maksimal yaxud mümkün qədər böyük olması kimi yeni anlayışlarının verilməsi tələbatı meydana çıxır. Ona görə də, biz aşağıdakı tərifləri veririk.

Tərif 2. (1.1)-(1.3) məsələsinin mümkün həllərindən

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij} x_j \leq b_i , \qquad (i = \overline{1,m})$$

şərtlərini ödəyən və

$$f = \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j x_j$$

funksiyasına ən böyük qiymət verən $X^o = (x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o)$ vektoruna məsələnin optimist həlli,

$$f^o = \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j x_j^o$$

ədədinə isə bu məsələnin optimist qiyməti deyəcəyik. Burada $b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i]$ $(i = \overline{1,m})$ qeyd olunmuş ədədlərdir.

Tərif 3. (1.1)-(1.3) məsələsinin mümkün həllərindən

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} x_j \leq b_i , \qquad (i = \overline{1,m})$$

şərtlərini ödəyən və

$$f = \sum_{j=1}^{n} \underline{c}_j x_j$$

funksiyasına ən böyük qiymət verən $X^p = (x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p)$ vektoruna məsələnin pessimist həlli,

$$f^p = \sum_{j=1}^{n} \underline{c}_j x_j^p$$

ədədinə isə bu məsələnin pessimist qiyməti deyəcəyik. Burada $b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i]$ $(i = \overline{1,m})$ qeyd olunmuş ədədlərdir.

Tərif 4. (1.1)-(1.3) məsələsinin mümkün həllərindən

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij} x_j \leq b_i , \qquad (i = \overline{1,m})$$

şərtlərini ödəyən və müəyyən bir kriteriyaya görə

$$f = \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j x_j$$

funksiyasına ən böyük qiymət verən $X^{so} = (x_1^{so}, x_2^{so}, \dots, x_n^{so})$ vektoruna məsələnin suboptimist həlli,

$$f^{so} = \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j x_j^{so}$$

ədədinə isə bu məsələnin suboptimist qiyməti deyəcəyik. Burada $b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i]$ $(i = \overline{1,m})$ qeyd olunmuş ədədlərdir.

Tərif 5. (1.1)-(1.3) məsələsinin mümkün həllərindən

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} x_j \leq b_i , \qquad (i = \overline{1,m})$$

şərtlərini ödəyən və müəyyən bir kriteriyaya görə

$$f = \sum_{j=1}^{n} \underline{c}_j x_j$$

funksiyasına ən böyük qiymət verən $X^{sp} = (x_1^{sp}, x_2^{sp}, \dots, x_n^{sp})$ vektoruna məsələnin subpessimist həlli,

$$f^{sp} = \sum_{j=1}^{n} \underline{c}_j x_j^{sp}$$

ədədinə isə bu məsələnin subpessimist qiyməti deyəcəyik. Burada $b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i]$ $(i = \overline{1,m})$ qeyd olunmuş ədədlərdir.

(1.1)-(1.3) məsələsinin suboptimist və subpessimist həllərinin qurulması məqsədilə (1.2) sisteminin sağ tərəflərini intervallar əvəzinə qeyd olunmuş ədədlər seçməklə bu məsələni aşağıdakı formada yazaq.

$$\sum_{j=1}^{n} [\underline{c}_j, \overline{c}_j] x_j \to max \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}] x_j \leq b_i , \qquad (i = \overline{1,m}), \tag{3.2}$$

$$0 \leq x_j \leq d_j \ , \quad x_j \text{ və } d_j - \text{tamdırlar } \ (j = \overline{1,n}). \tag{3.3}$$

Burada $\underline{a}_{ij} \geq 0,\ \overline{a}_{ij} \geq 0,\ b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i],\ \underline{b}_i > 0,\ \overline{b}_i > 0,\ \underline{c}_j > 0, \overline{c}_j > 0, (i = \overline{1,m}\ , j = \overline{1,n})$ verilmiş ədədlərdir və $\underline{a}_{ij} \leq \overline{a}_{ij} \leq b_i$ $(i = \overline{1,m}\, , j = \overline{1,n})$ şərtləri ödənilməlidir. (3.1)-(3.3) məsələsini aşağıdakı ekvivalent formada yazaq.

$$\sum_{j=1}^{n} [\underline{c}_j, \overline{c}_j] x_j \to max \tag{3.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} [\underline{\alpha}_{ij}, \overline{\alpha}_{ij}] x_j \leq 1 , \qquad (i = \overline{1,m}), \tag{3.5}$$

$$0 \leq x_j \leq d_j \ , \quad x_j \text{ və } d_j - \text{tamdırlar } \ (j = \overline{1,n}). \tag{3.6}$$

Burada $\underline{\alpha}_{ij} = \underline{a}_{ij}/b_i$, $\overline{\alpha}_{ij} = \overline{a}_{ij}/b_i$ $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ və $0 \leq \underline{\alpha}_{ij} \leq 1, 0 \leq \overline{\alpha}_{ij} \leq 1$, $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ kimi tapılmışdır. Aşağıdakı işarələmələri qəbul edək.

$$\underline{P}_j = (\underline{\alpha}_{1j}, \underline{\alpha}_{2j}, \dots, \underline{\alpha}_{mj})^T, \qquad \overline{P}_j = (\overline{\alpha}_{1j}, \overline{\alpha}_{2j}, \dots, \overline{\alpha}_{mj})^T, \qquad (j = \overline{1,n}),$$

$$P_o = (1,1, \dots ,1)^T.$$

Qeyd edək ki, suboptimist və subpessimist həllərinin qurulması prosesi $X = (0,0, \dots ,0)$ həllindən başlayır. Əvvəlcə, (3.4)-(3.6) məsələsinin $X^{so} = (x_1^{so}, x_2^{so}, \dots, x_n^{so})$ suboptimist həllini qurma prosesinə baxaq (subpessimist hıllin qurulma prosesi də analoji qaydada aparılır).

Biz müəyyən j_* nömrəsi üçün $x_{j_*}^{so} := x_{j_*}^{so} + 1$ qəbul etmişiksə, onda növbəti $x_j^{so} := x_j^{so} + 1$ ($j = \overline{1,n}$) seçimləri üçün (3.5) sisteminin sağ tərəflərində $P_o = (1 - \underline{\alpha}_{1j_*}, 1 - \underline{\alpha}_{2j_*}, \dots, 1 - \underline{\alpha}_{mj_*})$ resursları qalar. Bu zaman P_o qalıq resurslarından növbəti dəfə istifadə etməyə müəyyən qiymət (cərimə) qoymaq lazımdır. Onda, hər hansı i nömrəsi üçün 1-$\underline{\alpha}_{ij_*}$ qalıq resursu kiçildikcə (yəni defisit resursdursa) həmin resursdan istifadə etməyin qiyməti (cəriməsi) böyük olmalıdır. Belə həll qurma prosesi, ümumiyyətlə P_o qalıq resurslarından eyni miqdarda istifadə etməyə imkan verər. Bu isə öz növbəsində daha yaxşi suboptimist həll qurmağa imkan yaradar.

Bu işdə biz, hər bir j-ci $\left(j=\overline{1,n}\right)$, qalıq resurslarından istifadə etməyin qiyməti (cəriməsi) olaraq

$$\underline{q}_i=\frac{1}{1-\underline{\alpha}_{ij_*}}\quad,(i=\overline{1,m}\,) \tag{3.7}$$

qəbul etmişik. Göründüyü kimi hər növbəti $x_{j_*}:=x_{j_*}+1$ qəbul etdikdə (3.7) cərimələrinin məxrəci kiçilir. Daha ümumi düstur çıxarmaq məqsədilə aşağıdakı işarələmələri qəbul edək.

$$\omega^{so}=\left\{j\mid x_j^{so}\geq 1\right\}\ ,\quad \Omega=\{1,2,\dots,n\}\ , \tag{3.8}$$

$$\underline{r}_i=\sum_{j\in\omega^{so}}\underline{\alpha}_{ij}x_j^{so},\ \ (\,i=\overline{1,m}\,)\ \ . \tag{3.9}$$

Nəticədə, (3.7) düsturu əvəzinə hər dəfə qalıq $P_o=(1-\underline{r}_1,1-\underline{r}_2,\dots,1-\underline{r}_m)$ qalıq resursundan istifadə etməyin qiyməti (cəriməsi) olaraq

$$\underline{q}_i=\frac{1}{1-\underline{r}_i}\ ,\qquad (\,i=\overline{1,m}\,) \tag{3.10}$$

alarıq. Bu zaman hər bir i $(i=\overline{1,m})$ üçün $1-\underline{r}_i$ qalıq resursları azaldıqca onlardan istifadə etməyə qoyulan $\underline{q}_i$ $(i=\overline{1,m})$ qiymətlərin (cərimələrin) sürətlə və qeyri-xətti olaraq artması birbaşa görünür. Ona görə də bu üsulu biz **qeyri-xətti cərimə üsulu** adlandırmışıq. Belə halda defisit resursdan, yəni (3.5) sisteminin daha çox kiçilmiş sağ tərəflərindən istifadə məhdudlaşar. Bu zaman hər hansı j nömrəsi üçün $x_j^{so}:=x_j^{so}+1$ qəbul edilərsə qalıq resurslardan istifadə etməyin ümumi qiyməti (cəriməsi)

$$\underline{Q}_j=\sum_{i=1}^{m}\underline{\alpha}_{ij}\,,\underline{q}_i\quad (\,j\in\Omega) \tag{3.11}$$

qədər olar. Onda (3.4) funksiyasının vahid qiymətə (cəriməyə və ya xərcə) düşən artımı isə optimist strategiyalar üçün

$$\overline{f}_j=\frac{\overline{c}_j}{\underline{Q}_j},\ \ (\,j\in\Omega) \tag{3.12}$$

təşkil edər. Təbii olaraq elə j_* nömrəsi seçib $x_{j_*}^{so}:=x_{j_*}^{so}+1$ qəbul etməliyik ki, j_* nömrəsi aşağıdakı münasibətdən tapılsın.

$$j_*=arg\max_{j\in\Omega}\left\{\overline{f}_j\right\}\qquad \text{və ya}\qquad \max_{j\in\Omega}\left\{\overline{f}_j\right\}=\overline{f}_{j_*} \tag{3.13}$$

olsun.

Bu kriteriyalardan istifadə etməklə (3.1)-(3.3) məsələsinin (və ya (3.4)-(3.6) məsələsinin) suboptimist həllini qura bilərik. Başlanğıcda $X^{so}=(0,0,\dots,0)$ qəbul edib, (3.13) kriteriyası ilə hər dəfə yeni j_* nömrəsi seçilir və $x_{j_*}:=x_{j_*}+1$ qəbul etməyin mümkünlüyü yoxlanılır. Bu proses o zaman başa çatır ki, daha heç bir x_j $(\,j=\overline{1,n})$ dəyişəninin cari qiymətini artırmaq mümkün olmasın. Belə həll qurma prosesini bir qədər ətraflı yazaq.

İlkin olaraq, $b_i:=\overline{b}_i,(i=\overline{1,m})$ qəbul edib (3.4)-(3.6) məsələsini qururuq. Sonra başlanğıc $X^{so}=(0,0,\dots,0)$ həllini qəbul edirik. Onda (3.8) düsturuna görə $\omega^{so}=\emptyset$ və (3.9), (3.10) düsturlarına görə $\underline{r}_i=0$, $\underline{q}_i=1$ $(i=\overline{1,m})$ alarıq. Bundan sonra (3.11), (3.12) və (3.13) düsturlarından ardıcıl istifadə etməklə müəyyən j_* nömrəsi tapırıq. Əgər $\underline{P}_{j_*}\leq P_0$ və $x_{j_*}+1\ \leq d_{j_*}$ olarsa, onda $P_0:=P_0-\underline{P}_{j_*}$, $x_{j_*}^{so}:=x_{j_*}^{so}+1$ və $\omega^{so}:=\omega^{so}\cup\{j_*\}$ qəbul edirik. Aydındır ki, eyni bir j_*-

nömrəsi bir neçə dəfə təkrarən tapıla bilər. Əks halda, yəni $\underline{P}_{j_*} \leq P_0$ münasibəti heç olmasa bir dənə koordinat üçün ödənilmədikdə və ya $x_{j_*} + 1 > d_{j_*}$ olsa, $\Omega := \Omega \backslash \{j_*\}$ qəbul edib (3.13) düsturu ilə növbəti j_* nömrəsi tapılır.

Bu qayda ilə həll qurma prosesi $\Omega = \emptyset$ olana kimi davam etdirilir. Nəticədə (3.1)-(3.3) məsələsinin $X^{so} = (x_1^{so}, x_2^{so}, \dots, x_n^{so})$ suboptimist həllini və buna uyğun olan

$$f^{so} = \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j x_j^{so}$$

suboptimist qiymətini alarıq.

Qeyd etmək lazımdır ki, (3.4)-(3.6) məsələsinin subpessimist həllini də yuxarıdakı qaydaya analoji olaraq qurmaq olar. Bu zaman başlanğıcda $X^{sp} = (0,0,\dots,0)$ qəbul olunur və (3.7)-(3.13) düsturları uyğun olaraq aşağıdakı formaları alar:

$$\overline{q}_i = \frac{1}{1 - \overline{\alpha}_{ij_*}} \ ,\left(i = \overline{1,m}\right) \ , \ \omega^{sp} = \left\{j \mid x_j^{sp} \geq 1\right\} \ , \ \Omega = \{1,2,\dots,n\} \, ,$$

$$\overline{r}_i = \sum_{j \in \omega^{sp}} \overline{\alpha}_{ij} x_j^{sp}, \ \left(i = \overline{1,m} \right),$$

$$\overline{q}_i = \frac{1}{1 - \overline{r}_i} \ ,\left(i = \overline{1,m} \right), \qquad \overline{Q}_j = \sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha}_{ij} \, , \overline{q}_i \quad (j \in \Omega) \, , \qquad \underline{f_j} = \frac{\underline{c}_j}{\overline{Q}_j} \, , \ \ (j \in \Omega),$$

$$j_* = arg \max_{j \in \Omega} \left\{\underline{f_j}\right\} \ .$$

Bu kəmiyyətlərdən istifadə etməklə (3.1)-(3.3) (yaxud (3.4)-(3.6)) məsələsinin $X^{sp} = (x_1^{sp}, x_2^{sp}, \dots, x_n^{sp})$ subpessimist həllinin qurulma prosesi yuxarıda verdiyimiz $X^{so} = (x_1^{so}, x_2^{so}, \dots, x_n^{so})$ suboptimist həllin qurulma prosesi ilə eynidir. Bu zaman

$$f^{sp} = \sum_{j=1}^{n} \underline{c}_j x_j^{sp}$$

alarıq.

Nəzərə çatdıraq ki, qeyri-xətti cərimə (qiymətləndirmə) anlayışı ilk dəfə əmsalları sabit ədədlər olan Bul proqramlaşdırması məsələsi üçün [9, s.1443-1453] işində verilmişdir. Bu işdə isə həmin anlayış əmsalları intervallar şəklində olan tam ədədli proqramlaşdırma məsələsi halına ümumiləşdirilmişdir.

Biz (3.1)-(3.3) məsələsinin suboptimist və ya subpessimist həllərini qurarkən (3.2) sisteminin sağ tərəflərinə fiksə olunmuş b_i ($b_i \in [\underline{b_i}, \overline{b}_i]$) $\left(i = \overline{1,m} \right)$ ədədlərini yazmışıq. Ən yaxşı suboptimist və subpessimist həllər isə $[\underline{b_i}, \overline{b}_i]$ $\left(i = \overline{1,m} \right)$ intervalındakı bütün tam ədədlərə baxdıqdan sonra tapılar. Deməli, hər bir i $\left(i = \overline{1,m} \right)$ üçün $[\underline{b_i}, \overline{b}_i]$ intervalının uzunluğu kifayət qədər böyük olarsa, onda buradakı qeyd olunmuş b_i $\left(i = \overline{1,m} \right)$ ədədləri üçün həddən artıq çoxlu sayda məsələ həll olunmalıdır. Ən yaxşı suboptimist və subpessimist həlləri itirməmək şərtilə, həll olunası məsələlərin sayını azaltmaq üçün biz $[\underline{b_i}, \overline{b}_i]$ $\left(i = \overline{1,m} \right)$ intervalına "dixotomiya" (yarıya bölmə) prinsipini tətbiq edəcəyik.

Başlanğıcda $\underline{b_i^0} = \underline{b_i}$; $\overline{b}_i^0 = \overline{b}_i\left(i = \overline{1,m}\right)$ qeyd edib yadda saxlayaq. Sonra $b_i := \overline{b}_i\left(i = \overline{1,m}\right)$ qəbul edib, (3.1)-(3.3) məsələsindən alınan uyğun (3.4)-(3.6) məsələsini həll etməklə müəyyən $X^{so} = (x_1^{so}, x_2^{so}, \dots, x_n^{so})$ suboptimist və $X^{sp} = (x_1^{sp}, x_2^{sp}, \dots, x_n^{sp})$ subpessimist həllərini tapmaq olar. Onda (3.4) funksiyasının suboptimist və subpessimist qiymətləri uyğun olaraq

$$f^{so} = \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j x_j^{so} \quad \text{və} \quad f^{sp} = \sum_{j=1}^{n} \underline{c}_j x_j^{sp}$$

olacaq. Lakin biz elə $X^o = (x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o)$ suboptimist və $X^p = (x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p)$ subpessimist həllərini tapmaq istəyirik ki, (3.4) funksiyasının buna uyğun olan qiyməti f^{so} və f^{sp} qiymətlərindən kiçik olmasın və həmin həllin tələb etdiyi $b_i(i = \overline{1,m})$ tam ədədləri (resursları) ilkin verilən $\overline{b}_i(i = \overline{1,m})$ tam ədədlərindən kiçik olsun. Bu məqsədlə dixotomiya prinsipindən istifadə edəcəyik. Əvvəlcə $b_i \coloneqq [(\underline{b}_i + \overline{b}_i)/2]$ $(i = \overline{1,m})$ ($[z]$ ilə z ədədinin tam hissəsi işarə olunub) qeyd edib, alınmış (3.4)-(3.6) məsələsinin $X^o = (x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o)$ suboptimist və $X^p = (x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p)$ subpessimist həllərini və uyğun

$$f^o \coloneqq \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j x_j^o \quad \text{və} \quad f^p \coloneqq \sum_{j=1}^{n} \underline{c}_j x_j^p$$

suboptimist və subpessimist qiymətlərini tapırıq. Əgər $f^o < f^{so}$ $(f^p < f^{sp})$ olsa, onda $\underline{b}_i \coloneqq b_i(i = \overline{1,m})$ əks halda, yəni $f^o \geq f^{so}$ $(f^p \geq f^{sp})$ olsa, onda $x_j^{so} \coloneqq x_j^o$ $(x_j^{sp} \coloneqq x_j^p)$ $(j = \overline{1,n})$, $f^{so} = f^o$ $(f^{sp} = f^p)$ və $\overline{b}_i \coloneqq b_i(i = \overline{1,m})$ yazmaqla yenidən $b_i \coloneqq [(\underline{b}_i + \overline{b}_i)/2]$ $(i = \overline{1,m})$ qəbul edirik. Bundan sonra növbəti (3.1)-(3.3) məsələsini quraraq burada (3.4)-(3.6) məsələsini alıb, onu həll edirik. Bu hesablama prosesini o vaxta qədər davam etdiririk ki, növbəti yarıya bölmə zamanı tapılmış $b_i(i = \overline{1,m})$ ədədləri üçün $\underline{b}_i = b_i(i = \overline{1,m})$ olsun. Bu prosesdə yadda saxlanmış $X^{so} = (x_1^{so}, x_2^{so}, \dots, x_n^{so})$ $(X^{sp} = (x_1^{sp}, x_2^{sp}, \dots, x_n^{sp}))$ və f^{so} (f^{sp}) uyğun olaraq baxılan məsələnin suboptimist (subpessimist) həlli və suboptimist (subpessimist) qiyməti olar.

Qeyd etmək lazımdır ki, yarıya bölmə prosesi başlayarkən (1.2) sisteminin sağ tərəfində verilmiş $\overline{b}_i(i = \overline{1,m})$ ədədini $\overline{b}_i^o(i = \overline{1,m})$ kimi yadda saxlayıb, $\overline{b}_i(i = \overline{1,m})$ ədədini dəyişmişik. Ona görə də təklif etdiyimiz üsulun nə dərəcədə keyfiyyətli olmasını aydınlaşdırmaq üçün $\Delta_i = \overline{b}_i^0 - b_i(i = \overline{1,m})$ kəmiyyətlərini müxtəlif ölçülü məsələlər üzərində eksperimentlər apardıqdan sonra analiz etməliyik.

Bundan əlavə, tapılmış suboptimist və subpessimist qiymətlərin optimist və pessimist qiymətlərdən olan xətalarını qiymətləndirmək üçün uyğun xətti proqramlaşdırma məsələləri həll olunmalıdır. Lakin xətti proqramlaşdırma məsələsi kimi böyük ölçülü məsələlərin həll olunması müəyyən çətinliklərlə bağlıdır. Digər tərəfdən eyni ölçülü çoxlu sayda müxtəlif məsələlər həll etdiyimizdən, onları həm də xətti proqramlaşdırma məsələsi kimi həll etmək müəyyən problemlər yaradar (məs. vaxt, yaddaş və s.). Bu məqsədlə həmin xətaların asanlıqla qiymətləndirilməsi üçün biz aşağıdakı kimi Laqranj tipli funksiyalar qurmuşuq.

$$L^o(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \sum_{j \in \omega^o} \overline{c}_j d_j + \sum_{i=1}^{m} (b_i - \sum_{j \in \omega^o} \underline{a}_{ij} d_j)\, \lambda_i\,,$$

$$L^p(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \sum_{j \in \omega^p} \underline{c}_j d_j + \sum_{i=1}^{m} (b_i - \sum_{j \in \omega^p} \overline{a}_{ij} d_j)\, \lambda_i\,.$$

Burada

$$\omega^o = \left\{ j \,|\, \overline{c}_j - \sum_{i=1}^{m} \underline{a}_{ij} \lambda_i > 0 \right\}, \qquad \omega^p = \left\{ j \,|\, \underline{c}_j - \sum_{i=1}^{m} \overline{a}_{ij} \lambda_i > 0 \right\},$$

b_i $(i = \overline{1,m})$ isə $[\underline{b}_i, \overline{b}_i]$ $(i = \overline{1,m})$ intervalında olan qeyd olunmuş ədədlərdir.

Bundan əlavə aşağıdakı teoremi də isbat etmişik.

Teorem. (1.1)-(1.3) məsələsinin f^o– optimist və f^p– pessimist qiymətləri üçün

$$f^o \le \min_{\lambda_i \ge 0} L^o(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), \qquad f^p \le \min_{\lambda_i \ge 0} L^p(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m),$$
$$f^{so} \le f^o, \quad f^{sp} \le f^p$$

münasibətləri doğrudur.

Nəticədə, f^{so} və f^{sp} qiymətlərinin yuxarı sərhədləri olan $\overline{f}^{so}$ və $\overline{f}^{sp}$ ədədlərini tapmaq üçün $L^o(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ və $L^p(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ funksiyalarını uyğun olaraq minimallaşdırmalıyıq. Onda suboptimist və subpessimist qiymətləri üçün δ^{so} və δ^{sp} nisbi xətaları uyğun olaraq aşağıdakı kimi hesablanar.

$$\delta^{so} \le (\overline{f}^{so} - f^{so}) \ / \overline{f}^{so}, \qquad \delta^{sp} \le (\overline{f}^{sp} - f^{sp}) \ / \overline{f}^{sp}.$$

4. Hesablama eksperimentlərinin nəticələri. Bu işdə təklif olunmuş üsulların keyfiyyətlərini aydınlaşdırmaq məqsədilə, həmin üsulların "Delphi-7" dilində proqramları qurulmuş və müxtəlif ölçülü məsələlər üzərində geniş hesablama eksperimentləri aparılmışdır. Həll olunmuş məsələlərin əmsalları aşağıdakı kimi seçilmiş təsadüfi tam ədədlərdir.

$$0 \le \underline{a}_{ij} \le 999, \quad 0 < \overline{a}_{ij} \le 999, \quad 0 < \underline{c}_j \le 999, \quad 0 < \overline{c}_j \le 999 \quad \left(i = \overline{1,m}\ , j = \overline{1,n}\right).$$

Bu zaman $\overline{a}_{ij} < \underline{a}_{ij}$ olarsa, $\overline{a}_{ij} := \underline{a}_{ij} + 10$ və $\overline{c}_j < \underline{c}_j$ olduqda isə $\overline{c}_j := \underline{c}_j + 10$ və $d_j = 10$, $\left(j = \overline{1,n}\right)$ qəbul edirik.

Bundan əlavə $\underline{b}_i$ və $\overline{b}_i$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ədədlərini aşağıdakı kimi təyin edirik:

$$\underline{b}_i := \left[\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}\, d_j\right] \quad , \qquad \overline{b}_i := \left[\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}\, d_j\right] \qquad \left(i = \overline{1,m}\ \right).$$

Aşağıdakı cədvəllərdə hesablama eksperimentlərinin nəticələri verilmişdir. Bu cədvəllərdə qəbul olunmuş işarələmələr aşağıdakılardır:

$N -$ eyni ölçülü müxtəlif məsələlərin nömrələridir. Qeyd edək ki, eksperimentlərdə eyni ölçülü beş müxtəlif məsələ həll olunmuşdur.

$f_c^{so}, f_c^{sp} -$ (1.1) funksiyasının uyğun olaraq qeyri-xətti cərimə üsulları ilə tapılmış suboptimist və subpessimist qiymətləridir.

$\overline{f}_{se}^{so}, \overline{f}_{se}^{sp}, \overline{f}_{qr}^{so}, \overline{f}_{qr}^{sp} -$ (1.1) funksiyasının suboptimist və subpessimist qiymətlərinin uyğun olaraq sürətli enmə və subqradiyent üsulları ilə tapılmış yuxarı sərhədləridir.

$\delta_c^{so}\ , \delta_c^{sp} -$ (1.1) funksiyasının qeyri-xətti cərimə üsulu ilə tapılmış uyğun suboptimist və subpessimist qiymətlərinin öz yuxarı sərhədlərindən olan nisbi xətalarıdır. Belə ki,

$$\delta_c^{so} = (\overline{f}^{so} - f_c^{so}) / \overline{f}^{so}, \qquad \delta_c^{sp} = (\overline{f}^{sp} - f_c^{sp}) / \overline{f}^{sp}.$$

$b_c^{so}\ , b_c^{sp} -$ qeyri-xətti cərimə üsulunun uyğun olaraq verdiyi həllərə görə (1.2) sistemində başlanğıcda verilmiş $\overline{b}_i\left(i = \overline{1,m}\ \right)$ sağ tərəflərinin orta azalma vahidləridir. Belə ki,

$$b_c^{so} = \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m}(\overline{b}_i - b_i^{so}(c))\right), \qquad b_c^{sp} = \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m}(\overline{b}_i - b_i^{sp}(c))\right),$$
$$b_i^{so}(c) = \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij} x_j^{so}(c)\ , \quad b_i^{sp}(c) = \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} x_j^{sp}(c).$$

Burada

$$X^{so}(c) = \left(x_1^{so}(c), x_2^{so}(c), \dots, x_n^{so}(c)\right), \quad X^{sp}(c) = \left(x_1^{sp}(c), x_2^{sp}(c), \dots, x_n^{sp}(c)\right).$$

həlləri isə uyğun olaraq qeyri-xətti cərimə üsulu ilə tapılmış suboptimist və subpessimist həlləridir.

Cədvəl 1

Suboptimist, subpessimist və xətaların qiymətləri ($\boldsymbol{m \times n = 20 \times 100}$)

N	1	2	3	4	5
f_c^{so}	42839.0	43466.0	45047.0	44892.0	42518.0
f_c^{sp}	24466.0	25273.0	28228.0	26575.0	25225.0
$\overline{f}_{qr}^{so}$	42980.0	43542.0	45147.0	44492.0	42571.0
$\overline{f}_{qr}^{sp}$	24523.0	25310.0	28263.0	26584.0	25275.0
$\overline{f}_{se}^{so}$	42980.0	44182.0	46074.0	45483.0	42983.0
$\overline{f}_{se}^{sp}$	24523.0	25436.0	28319.0	26613.0	25453.0
δ_{qr}^{o}	0.0033	0.0017	0.0022	0.0009	0.0012
δ_{qr}^{p}	0.0023	0.0015	0.0012	0.0003	0.0020
δ_{se}^{o}	0.0166	0.0162	0.0223	0.0130	0.0108
δ_{se}^{p}	0.0154	0.0064	0.0032	0.0014	0.0090
b_{ort}^{o}	762.350	826.50	1232.15	700.10	1158.80
b_{ort}^{p}	2786.40	2159.0	1648.25	1884.35	1857.95

Cədvəl 2

Suboptimist, subpessimist və xətaların qiymətləri ($\boldsymbol{m \times n = 20 \times 200}$)

N	1	2	3	4	5
f_c^{so}	90832.0	90207.0	88570.0	89826.0	91109.0
f_c^{sp}	55517.0	55577.0	53365.0	54532.0	55487.0
$\overline{f}_{qr}^{so}$	90975.0	90272.0	88698.0	89986.0	91313.0
$\overline{f}_{qr}^{sp}$	55540.0	55598.0	53421.0	54672.0	55508.0
$\overline{f}_{se}^{so}$	92072.0	91168.0	91295.0	90898.0	92268.0
$\overline{f}_{se}^{sp}$	55972.0	55982.0	53559.0	54882.0	55796.0
δ_{qr}^{o}	0.0016	0.0007	0.0014	0.0018	0.0022
δ_{qr}^{p}	0.0004	0.0004	0.0010	0.0026	0.0004
δ_{se}^{o}	0.0135	0.0105	0.0298	0.0118	0.0126
δ_{se}^{p}	0.0081	0.0072	0.0036	0.0064	0.0055
b_{ort}^{o}	910.50	899.850	1235.25	1284.85	1315.55
b_{ort}^{p}	1758.60	1845.50	2905.45	2284.55	1854.60

Cədvəl 3

Suboptimist, subpessimist və xətaların qiymətləri ($\boldsymbol{m \times n = 20 \times 500}$)

N	1	2	3	4	5
f_c^{so}	227745.0	226422.0	227421.0	225110.0	227340.0
f_c^{sp}	138775.0	137720.0	141945.0	135013.0	138202.0
$\overline{f}_{qr}^{so}$	227921.0	226521.0	227596.0	225212.0	227568.0
$\overline{f}_{qr}^{sp}$	138881.0	137748.0	142009.0	135063.0	138417.0
$\overline{f}_{se}^{so}$	229042.0	228492.0	228936.0	226697.0	228944.0
$\overline{f}_{se}^{sp}$	139498.0	138037.0	142653.0	135630.0	139046.0
δ_{qr}^{o}	0.0008	0.0004	0.0008	0.0005	0.0010

δ_{qr}^{p}	0.0008	0.0002	0.0005	0.0004	0.0016
δ_{se}^{o}	0.0057	0.0091	0.0066	0.0070	0.0070
δ_{se}^{p}	0.0052	0.0023	0.0050	0.0045	0.0061
b_{ort}^{o}	1552.30	1153.05	1090.60	1115.75	1074.50
b_{ort}^{p}	3291.0	3887.70	2408.70	5184.30	3294.65

Cədvəl 4

Suboptimist, subpessimist və xətaların qiymətləri ($\boldsymbol{m \times n = 20 \times 1000}$)

N	1	2	3	4	5
f_c^{so}	464256.0	458899.0	458792.0	453473.0	455124.0
f_c^{sp}	283346.0	283818.0	453473.0	276135.0	279826.0
$\overline{f}_{qr}^{so}$	464394.0	458996.0	458932.0	453707.0	455277.0
$\overline{f}_{qr}^{sp}$	283439.0	283842.0	284876.0	276272.0	279939.0
$\overline{f}_{se}^{so}$	466121.0	461027.0	461714.0	457388.0	457089.0
$\overline{f}_{se}^{sp}$	284503.0	284672.0	285337.0	276843.0	280400.0
δ_{qr}^{o}	0.0003	0.0002	0.0003	0.0005	0.0003
δ_{qr}^{p}	0.0003	0.0001	0.0003	0.0005	0.0004
δ_{se}^{o}	0.0040	0.0046	0.0063	0.0086	0.0043
δ_{se}^{p}	0.0041	0.0030	0.0020	0.0026	0.0020
b_{ort}^{o}	1175.60	1113.40	878.650	1246.50	1043.45
b_{ort}^{p}	5252.25	3758.75	3147.60	4310.75	5015.35

Cədvəl 5

Suboptimist, subpessimist və xətaların qiymətləri ($\boldsymbol{m \times n = 50 \times 100}$)

N	1	2	3	4	5
f_c^{so}	44386.0	43443.0	42009.0	43344.0	46239.0
f_c^{sp}	27660.0	26169.0	25817.0	25790.0	27148.0
$\overline{f}_{qr}^{so}$	44461.0	43501.0	42101.0	43409.0	46364.0
$\overline{f}_{qr}^{sp}$	27733.0	26205.0	25886.0	25845.0	27207.0
$\overline{f}_{se}^{so}$	45523.0	44217.0	42699.0	43976.0	47247.0
$\overline{f}_{se}^{sp}$	27781.0	26350.0	25975.0	26138.0	27148.0
δ_{qr}^{o}	0.0017	0.0013	0.0022	0.0015	0.0027
δ_{qr}^{p}	0.0026	0.0014	0.0027	0.0144	0.0022
δ_{se}^{o}	0.0250	0.0175	0.0162	0.0021	0.0213
δ_{se}^{p}	0.0044	0.0069	0.0061	0.0133	0.0041
b_{ort}^{o}	1285.50	1433.62	1420.28	1820.56	992.46
b_{ort}^{p}	2247.26	2235.40	2392.60	3209.58	2599.60

Cədvəl 6

Suboptimist, subpessimist və xətaların qiymətləri ($\boldsymbol{m \times n = 50 \times 200}$)

N	1	2	3	4	5
f_c^{so}	85628.0	88172.0	87225.0	90021.0	88716.0
f_c^{sp}	51359.0	53271.0	53400.0	56392.0	55348.0
$\overline{f}_{qr}^{so}$	85756.0	88272.0	87275.0	90162.0	88855.0

$\overline{f}_{qr}^{sp}$	51434.0	53333.0	53445.0	56433.0	55421.0
$\overline{f}_{se}^{so}$	86862.0	89817.0	88489.0	91291.0	89773.0
$\overline{f}_{se}^{sp}$	51492.0	53547.0	53526.0	56637.0	55849.0
δ_{qr}^{o}	0.0015	0.0011	0.0006	0.0016	0.0016
δ_{qr}^{p}	0.0015	0.0012	0.0008	0.0009	0.0013
δ_{se}^{o}	0.0142	0.0183	0.0143	0.0139	0.0118
δ_{se}^{p}	0.0026	0.0052	0.0024	0.0045	0.0090
b_{ort}^{o}	1867.92	2504.38	1989.48	2304.0	1918.50
b_{ort}^{p}	4537.94	3491.14	2992.10	2955.72	3009.44

Cədvəl 7

Suboptimist, subpessimist və xətaların qiymətləri ($\boldsymbol{m \times n = 50 \times 500}$)

N	1	2	3	4	5
f_c^{so}	220769.0	224791.0	223002.0	227871.0	225052.0
f_c^{sp}	136006.0	137442.0	137262.0	140943.0	137615.0
$\overline{f}_{qr}^{so}$	220997.0	224912.0	223330.0	227952.0	225229.0
$\overline{f}_{qr}^{sp}$	136108.0	137532.0	137297.0	141111.0	137751.0
$\overline{f}_{se}^{so}$	223476.0	228969.0	226292.0	232313.0	227644.0
$\overline{f}_{se}^{sp}$	136689.0	137805.0	138034.0	141562.0	138374.0
δ_{qr}^{o}	0.0010	0.0005	0.0015	0.0004	0.0008
δ_{qr}^{p}	0.0007	0.0007	0.0003	0.0012	0.0010
δ_{se}^{o}	0.0121	0.0144	0.0145	0.0191	0.0114
δ_{se}^{p}	0.0050	0.0026	0.0056	0.0044	0.0055
b_{ort}^{o}	2729.60	2779.46	3307.48	2642.30	2553.36
b_{ort}^{p}	4259.44	5126.86	5729.96	5172.78	5845.30

Cədvəl 8

Suboptimist, subpessimist və xətaların qiymətləri ($\boldsymbol{m \times n = 50 \times 1000}$)

N	1	2	3	4	5
f_c^{so}	455946.0	446906.0	453817.0	446579.0	454114.0
f_c^{sp}	281556.0	276982.0	284222.0	273224.0	279083.0
$\overline{f}_{qr}^{so}$	456229.0	447058.0	454227.0	446863.0	454247.0
$\overline{f}_{qr}^{sp}$	281777.0	277059.0	284323.0	273347.0	279405.0
$\overline{f}_{se}^{so}$	460025.0	450938.0	458343.0	453950.0	458790.0
$\overline{f}_{se}^{sp}$	282527.0	277733.0	284760.0	274403.0	279993.0
δ_{qr}^{o}	0.0006	0.0003	0.0009	0.0006	0.0003
δ_{qr}^{p}	0.0008	0.0003	0.0004	0.0004	0.0012
δ_{se}^{o}	0.0089	0.0089	0.0099	0.0162	0.0102
δ_{se}^{p}	0.0034	0.0027	0.0019	0.0043	0.0033
b_{ort}^{o}	3221.06	2758.48	5070.74	3967.04	2731.06
b_{ort}^{p}	7228.16	5915.54	8021.36	6650.70	7205.42

5. Nəticə. Cədvəllərdən göründüyü kimi təsadüfi əmsallara malik 40 dənə həll olunmuş məsələlərə görə suboptimist və subpessimist qiymətlər uyğun yuxarı sərhədlərindən çox da ciddi fərqlənmirlər. Cədvəllərə əsasən həmin xətaların uyğun olaraq ən kiçik və ən böyük qiymətləri optimist həll üçün 0,02%- 0,33% arasında, pessimist həll üçün isə 0,01%-1,44% arasında yerləşir. Bunlar isə kifayət qədər kiçik olduğundan, işdə təklif etdiyimiz üsulların kifayət qədər effektiv olduğunu bir daha təsdiq edir. Bundan əlavə, Laqranj funksiyasının minimallaşması üçün işdə verilmiş subqradiyent tipli üsul sürətli enmə üsuluna nəzərən əksər hallarda daha kiçik qiymətlər verir.

Digər tərəfdən tapılmış suboptimist və subpessimist həlləri saxlamaq şərtilə (1.2) sisteminin sağ tərəflərində ilkin verilmiş $\overline{b}_i\,(i=\overline{1,m})$ ədədləri uyğun olaraq orta hesabla suboptimist həll üçün 878-5070, subpessimist həll üçün isə 1758-8021 vahid arasında azalmışdır (qeyd edək ki, məsələlərin əmsalları üçrəqəmli ədədlər olduğundan (1.2) sisteminin sağ tərəflərinin azalma vahidləri də nisbətən böyükdür). Bu nəticə isə onu göstərir ki, real praktiki məsələlərdə eyni nəticəni almaq üçün ayrılmış vəsaitlərdən kifayət qədər qənaətlə sərf oluna bilər.

Ədəbiyyat

1. Ватолин А.А. О задачах линейного программирования с интервальными коэффициентами// ЖВМ и МФ. - 1984.- Т. 24, N 11, с.1629-1637.
2. Рощин В.А., Семенова Н.В., Сергиенко И.В. Декомпозиционный подход к решению некоторых задач целочисленного программирования с неточными данными // ЖВМ и МФ.-1990. - Т. 30, N 5, с.786-791.
3. Devyaterikova M.V., Kolokolov A.A., Kolosov A.P. L- class enumeration algorithms for one discrete production planning problem with interval input data // Computers and Operations Research, Volume 36, İssue 2, February 2009, pp.316-324.
4. Семенова Н.В. Решение одной задачи обобщенного целочисленного программирования. // Кибернетика. – 1984, N 5, с.25-31.
5. Рощин В.А., Семенова Н.В., Сергиенко И.В. Вопросы решения и исследования одного класса задач неточного целочисленного программирования // Кибернетика. 1989, N 2, с.42-47.
6. Сергиенко Т.И., Козарацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. – Киев: Наукова думка, 1995, с.170.
7. Məmmədov K.Ş., Məmmədova A.H. Verilənləri intervallar olan Bul proqramlaşdırması məsələsinin suboptimist və subpessimist həllərinin qurulması üsulları // AMEA-nin “ Xəbərlər” jurnalı, 2014, N3, s.164-173.
8. Мамедов К.Ш., Мамедова А.Г. Понятия субоптимистического и субпессимистического решений и построения их в интервальной задаче булевого программирования // Радиоэлектоника,Информатика, Управление , 2016, N3, с.99-108.
9. Бабаев Дж.А., Мамедов К.Ш., Мехтиев М. Г. Методы построения субоптимальных решений многомерной задачи о ранце// ЖВМ и МФ, 1978, Т.28, N6, с.1443-1453.

K.Sh. Mammadov, A.H. Mammadova

Method of nonlinear penalty and estimation of error in constructing suboptimistic and subpessimistic solutions for integer programming problems with interval data

The concepts of "optimistic", "pessimistic", "suboptimistic" and "subpessimistic" solutions are introduced. A "nonlinear penalty" method is developed for constructing suboptimistic and subpessimistic solutions. The error of the solutions found from the optimal solution is estimated. To this end, a Lagrange-type function is constructed, it is shown that the minimum value of this function is the upper limit of suboptimistic and subpessimistic values, respectively. Algorithms such as steep and subgradient descent are developed to minimize this function. Numerous computational experiments on random large-dimensional problems are carried out. These experiments once again show the high efficiency of the methods developed in this paper.

Keywords: interval integer programming problem, optimistic, pessimistic, suboptimistic and subpessimistic solutions, nonlinear penalty, Lagrange type function, upper bound, computational experiments

УДК 519.852.6

К.Ш. Мамедов, А.Г. Мамедова

Метод нелинейного штрафа и оценка погрешности для построения субоптимистических и субпессимистических решений для задач целочисленного программирования с интервальными данными

Введены понятия «оптимистические», «пессимистические», «субоптимистические» и «субпессимистические» решения. Разработан метод «нелинейного штрафа» для построения субоптимистического и субпессимистического решений. Дана оценка погрешности найденных решений от оптимального решения. С этой целью построена функция типа Лагранжа, показано что минимальное значение этой функции является верхней границей субоптимистического и субпессимистического значений соответственно. Разработаны алгоритмы типа наискорейшего и субградиентного спуска для минимизации этой функции. Проведены многочисленные вычислительные эксперименты над случайными задачами большой размерности. Эти эксперименты еще раз показали высокую эффективность методов, разработанных в данной работе.

Ключевые слова: интервальная задача целочисленного программирования, оптимистические, пессимистические, субоптимистические и субпессимистические решения, нелинейный штраф, функция типа Лагранжа, верхняя граница, вычислительные эксперименты

AMEA İdarəetmə Sistemləri İnstitutu Təqdim olunub 16.12.2016