

UOT 539.622

A.B. HƏSƏNOV

FRAKTAL STRUKTURLU MƏSAMƏLİ MÜHİTLƏRDƏ KÜTLƏ MÜBADİLƏSİ PROSESLƏRİNİN RİYAZİ MODELLEŞDİRİLMƏSİ

Fraktal strukturlu məsaməli mühitlərdə kütlə mübadiləsi proseslərinin riyazi modelləşdirilməsi süzülmə məsələlərinin tədqiqi üçün adekvat riyazi modellərin tətbiqinə kömək edən bir modelin tədqiqat üçün istifadə məsələsinə baxılmışdır. Fraktal strukturlu massivlərdə kütlə mübadiləsi proseslərinin tədqiqi xarici intensiv təsirlər zamanı məsamələr fazasında baş verən dəyişikliklərin öyrənilməsinə və bu tip mühitlərdə məhsuldarlıq xarakteristikalarının idarə olunmasını təmin edə bilər.

Açar sözlər: fraktal struktur, özlü-elastik mühit, məsamələrin dəyişkən strukturu, süzülmə məsələləri

1. Giriş. Neftçixarmada və bir çox ekoloji məsələlərin tədqiqində qarşıya çıxan praktiki məsələlərin həlli üçün fraktal strukturlu məsaməli mühitlərdə kütlə mübadiləsi proseslərinin riyazi modelləşdirilməsi xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Məsələn, neftli-qazlı strukturlarda xarici təsirlər zamanı baş verən müvazinətsiz faza dəyişmələri ilə müşayiət olunur ki, bu da fraktal strukturların — Hele-Şou hücrələrinin yaranmasını şərtləndirir. Yaxud, müxtəlif səbəblərdən qrunut sularının səviyyəsinin yer səthinə yaxınlaşması torpaqların şorlaşması və bataqlıqlaşması ilə nəticələnir. Yeraltı sularının səviyyəsinin lazımi həddə saxlanılması, izafi suların sahələrdən uzaqlaşdırılması variantlarının seçilməsi, optimal aqrotexniki və meliorativ rejim vasitəsilə əkinə yararlı torpaqların münbitliyinin idarə olunması üçün yeraltı suların səviyyə variasiyalarının riyazi modelinin yaradılması olduqca zəruridir.

2. Məsələnin qoyuluşu. Torpaq-qrunut mühitinin əsas xarakteristikalarından biri məsamələrin həcm üzrə paylanma funksiyasıdır. Bu funksiya dedikdə adətən, ölçüləri $[r, r + dr]$ intervalında yerləşən məsamələrin $f(r)dr$ sayına mütənəsb olan $f(r)$ ədədi funksiyaları nəzərdə tutulur. Müxtəlif torpaq qatı nümunələri üçün məsamələrin təbii paylanma funksiyaları texniki ədəbiyyatda stasionar hal üçün qrafik şəkildə göstərilmişdir. Müəyyən həcmli qeyri-bircins məhsuldar qatda intensiv xarici təsirlər formasıyana, bəzilərinin qapanması fonunda yenilərinin yaranması və s. proseslərin baş verməsinə səbəb olur. Bu cür qeyri-xətti təzahürlərin riyazi modellərinin yaradılması onların fiziki mahiyyətinin araşdırılması və məqsədyönlü şəkildə idarə olunması üçün çox vacib və əhəmiyyətlidir.

3. Məsələnin həlli. Fərz edək ki, layın hər bir nöqtəsində istənilən t anında paylanma funksiyası $f = f(r, t)$ şəklindədir. Burada r – məsamə kanalının radiusudur. Zamanın başlanğıc qiymətlərində ($t = 0$), yəni xarici təsirlərin hələ tətbiq edilmədiyi vaxt $f(r, 0) = f^0(r)$ şəklində olur və $\int_0^\infty f^0(r)dr = 1$ şərti ödənilir

Əgər layda məsaməli kanalların miqdarını və ölçülərini dəyişə bilən struktur dəyişmələri baş verərsə, onda paylanma funksiyasının koordinat və zamandan asılı təkamül dəyişmələri öyrənilməlidir. Tutaq ki, məsaməli kanalların radiuslarının azalması sürəti $v_r(r, t)$, onların yaranması (və ya yox olması) sürəti isə $v_\eta(r, t)$ ilə işarə olunub. Bu sxemə əsasən dt zaman intervalında $[r, r + dr]$ aralığında mövcud olan kanalların sayının dəyişməsinə xarakterizə edən ifadə

$$f(r, t + dt)dr - f(r, t)dr \approx \frac{\partial f}{\partial t} dt dr \quad \text{olar, və ya}$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} dr dt = \frac{\partial}{\partial r} [v_r(r, t)f(r, t)] dr dt - v_\eta(r, t) dr dt.$$

Buradan alırıq ki, $\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r}(v_r f) + v_\eta f = 0$ olduğunu alırıq.

Bu prosesin “fərdi” xarakteri $v_r(r, t)$ və $v_\eta(r, t)$ əmsallarının iştirak etməsidir. Bu tənlik kifayət qədər ümumidir və mayələrin məsaməli mühitdə süzülməsi məsələlərinin geniş miqyaslı

həllinə imkan verir. Bu tənliyi tətbiq edərək kiçik qatılıqlı nanoqarıışıqların laya vurulmasında ortaya çıxan tətbiqi məsələləri, arid zonada kənd təsərrüfatı təyinatlı əkin sahələrinin suvarılması və bu yolla gübrələnməsi proseslərinin bir çox praktiki məsələlərini həll etmək olar. Əgər süzülmə axınlarında təbii və ya antropogen xarakterli dispers hissəciklər olarsa, onların ölçülərinə görə paylanma funksiyasını $q = q(v, t)$ ilə işarə edək. Burada $v = (4/3)a^3$ – hissəciyin həcmidir və sonrakı mülahizələrdə hissəcik dedikdə onun həcmi nəzərdə tutulur. Hissəciyin ölçüsünün və sayının intensivliyinin artması funksiyalarını, uyğun olaraq, h_v və h_z ilə işarə etsək alarıq:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v}(h_v q) + h_z = 0.$$

Layın mütləq keçiriciliyinin kənar təsirlər zamanı məsamələr fəzasının struktur dəyişmələri nəticəsində dəyişməsinin cari qiymətini $k(x, y, z, t)$ kimi işarə edək və $k = \bar{k}(x, y, z, t)k^0$ hasilini şəklində götürmək olar. Buradakı $\bar{k}(x, y, z, t)$ – qalıq keçiriciliyini silindrik kanallar üçün Haqen-Puazeyl yaxınlaşmasına uyğun paralel kapilyarlar modelinə görə təyin edə bilərik.

Zamanın başlanğıc anında Δl uzunluqlu vahid en kəsiyinə malik kanaldan ΔP təzyiq düşküsi nəticəsində keçən maye miqdarı $Q = k^0 \Delta P / (\mu \Delta l)$ kəmiyyətinə bərabərdir. Onda kapilyarlar dəstəsi üçün Haqen-Puazeyl düsturuna əsasən alırıq:

$$Q^0 = N \int_0^\infty \frac{\pi r^4 \Delta P}{8 \mu \xi \Delta l} f^0(r) dr \quad \text{və}$$

$$Q = N \int_0^\infty \frac{\pi r^4 \Delta P}{8 \mu \xi \Delta l} f(r) dr.$$

Buradan alınan ifadə ilə keçiriciliyi yüksək dəqiqliklə hesablamaq olar:

$$\bar{k} = \frac{k}{k^0} = \frac{\int_0^\infty r^4 f dr}{\int_0^\infty r^4 f^0 dr} \quad \text{və ya}$$

$$k = k^0 \frac{\int_0^\infty r^4 f dr}{\int_0^\infty r^4 f^0 dr}$$

Mikrohissəciklərin varlığı onların məsamələr daxilində düşməsi ehtimalını xeyli artırır və məsaməli kanalların giriş və ya çıxış hissələrinin ölçüsünün daralmasına səbəb ola bilər. Bu hadisənin ən sadə variantının riyazi təsviri zamanı sadəlik üçün fərz edilir ki, bütün kapilyarlar üçün boğaz hissənin radiusunun kanalın silindrik hissəsinin radiusuna nisbəti bütün kanallar üçün eynidir və əgər hissəciyin radiusu kanalın boğaz hissəsinin radiusuna bərabər və ya böyük isə məsamə kanalı tamamilə tutulur və ilişmiş hissəciklər kütləsinin öz keçiriciliyi layın keçiriciliyindən çox-çox kiçikdir. Kapilyar daxilində mayenin orta hərəkət sürəti üçün aşağıdakı ifadəni tapırıq:

$$v_{or} = |v| r^2 / (8 \xi \left(\frac{K_0}{\mu_0} + \frac{K_w}{\mu_w} \right) \mu_w).$$

Darsi və Puazeyl qanunlarının kombinəsindən kanallar dəstəsi üçün vahid zamanda keçən maye həcmi:

$$Q = |V| = \left(\frac{K_0}{\mu_0} + \frac{K_w}{\mu_w} \right) \frac{\Delta P}{\Delta l} \quad \text{olur.}$$

Qrunt sularının səviyyəsinin lazım olan həddə saxlanması meliorativ şəraitin əlverişliliyini təmin etmək üçün əsas vasitələrdən biridir. Səviyyənin idarə olunması drenaj sistemi vasitəsilə yerinə yetirilə bilər.

Qrunt sularının səviyyəsinin dəyişməsi tənliyi aşağıdakı şəkildə yazılır [1, s.52; 2, s.60]:

$$\delta \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{2} \left(\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{M_0} (h - H) + W$$

Burada $\delta, k, k_0, M_0, H \approx const, W = W(x, y, t)$ – infiltrasiya funksiyasıdır. Bu kəmiyyətlərin izahlı mənası [2, s.60]-da verilmişdir.

Sərbəst səthdə $y = H_0$ olduqda $h(x, H_0, t) = f(x, t)$, $y = 0$ olduqda $h(x, H_0, t) = 0$ (sukeçirməzlik şərti)

$h(x, y, t)$ və $W(x, y, t)$ funksiyaları hər hansı ε kiçik parametrinə nəzərən qüvvət funksiyası şəklində götürülür:

$$h(x, y, t) = h_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k h_k(x, y, t),$$

$$W(x, y, t) = W_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k W_k(x, y, t).$$

Bu ifadələri tənlikdə nəzərə alsaq və ε -nin eyni dərəcələrinin əmsallarını bərabərləşdirsək aşağıdakı diferensial tənliklər sistemini alarıq.

$$\delta \frac{\partial h_0(t)}{\partial t} + \frac{k_0}{M_0} h_0(t) = W_0$$

$$\partial \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right) = k h_0(t) \cdot \Delta h_1 - \frac{k_0}{M_0} \cdot h_1 - W_1$$

Bu halda birincidən başqa hər bir tənlik dəyişən əmsallı xətti tənliklərdir. Birinci tənlik isə birinci tərtib qeyri-bircins adi diferensial tənlikdir. Onun həlli:

$$h_0(t) = C \cdot e^{-at} + \frac{1}{\sigma} \cdot \int_0^t W_0(\tau) \cdot e^{-a(t-\tau)} d\tau,$$

$$a = \frac{k_0}{\delta \cdot M_0}, \quad C = h_0 + \Delta + \frac{W_0}{a}$$

$W_0 = W(x, y, t)$ $t = 0$ olduqda infultrasiyanın başlanğıc qiymətidir.

Tənliyi həll edərək, tapırıq:

$$h_1(x, y, t) = \ln \frac{t - \tau}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2 + y^2}{k \cdot k! \cdot 4a} \left(\frac{l}{\Delta t} - \frac{l}{t} \right),$$

$$h(x, y, t) = h_0(t) + \varepsilon \cdot h_1(x, y, t) + \dots$$

Torpaq-qrunut qatının stoxastik qeyri-bircinsliyini, məsaməli mühitlərin fraktal xarakterini nəzərə alsaq və kəsr tərtibli diferensiallama üçün məlum ifadələrdən istifadə etsək alarıq:

$$D_{0t}^a \varphi = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-a)} \int_0^t \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{a+1}}, & a < 0 \\ \varphi(\tau), & a = 0, \\ \frac{\partial^{[a]+1}}{\partial t^{[a]+1}} D_{0t}^{a-[a]-1} \varphi, & a > 0. \end{cases}$$

Onda

$$h_1 = k\Gamma(1-a) D_{0t}^{a-1} \frac{\partial h(x, y, \tau)}{\partial \tau},$$

Burada D_{0t}^{a-1} – kəsr tərtibli diferensiallama operatorudur.

M. Kaputo mənada kəsr tərtibli diferensiallama operatorundan istifadə etsək:

$$\partial_{0t}^{a-1} h(x, y, t) = D_{0t}^{a-1} \frac{\partial h(x, y, \tau)}{\partial \tau}, \quad 0 < a \leq 1,$$

və ifadələri müqayisə etsək

$$h_t = k\Gamma(1-a) \partial_{0t}^a h(x, y, t),$$

və ya

$$k\Gamma(1-a) \partial_{0t}^a (mh(x, y, t)) = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{k_0}{kd_0} K + f_0,$$

olduğunu tapırıq. Bu tənlik zamana görə kəsr tərtibli ümumiləşmiş Bussinesk tənliyi adlanır. Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$\lim_{a \rightarrow 1} \partial_{0t}^a h(x, y, t) = \frac{\partial h(x, y, t)}{\partial t}.$$

Ona görə də aşağıdakı halda bu tənlik klassik Bussinesk tənliyinə çevrilir

$$k = \frac{1}{\Gamma(1-a)} \text{ u } a \rightarrow 1$$

olduqda

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t),$$

olduğunu alırıq. Daha əlverişli formada

$$\frac{\partial(mh)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{k_0}{kd_0} K + f_0,$$

$$f_0 = -\frac{k_0}{d_0} (h_0 - H_0) + w.$$

olduğunu tapırıq. Bu qeyri-xətti tənliyin fiziki mülahizələri nəzərə almaqla xəttiləşdirilmiş həll üsulu yuxarıda verilmişdir.

Fraktal strukturluğun nəzərə alınması halında qrunt suyunun səviyyə variasiyalarının tədqiqi üçün yeni ifadə alırıq

$$h_t = k \int_0^t (t - \tau)^{-a} \frac{\partial h(x, y, \tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

Burada

$$a = \frac{kh_{cp}}{m}, \quad f = \frac{f_0}{m} - \frac{k_0 h_{cp}}{md_0}.$$

Tədqiqatçıların ciddi və əhəmiyyətli araşdırmalarına baxmayaraq, müvazinətsiz fiziki proseslərin adekvat modellərinin yaradılması məsələsi hələ də aktualdır. Məsələli mühitdə süzülmə tənliyini ümumi halda aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} = \text{div}(\rho \vec{V})$$

$$\vec{V} = -\frac{k}{\mu} \text{grad}P \quad (3.1)$$

Bu tənliyə $\rho = \rho(P, T)$ hal tənliyini və mühitin məsaməlilik $m = m(P, T) = m(\rho)$ tənliyini əlavə etmək zəruridir.

Bu sistemin müxtəlif modifikasiyalarda həlləri tapılıb praktikada tətbiq olunsada, həmin həllər bir çox zəruri faktorları – mühitin “yaddaş” effektini, məsamələrin fəza korrelyasiyalarını, bir sözlə sistemin qeyri-xəttiliyini nəzərə alınmır. (3.1) sistemini kəsr tərtibli törəmənin tətbiqi üçün ümumiləşdirək [3, s. 112]:

$$l_0 \partial_{0\tau}^a (m\rho) + t_0 D_{0\xi}^\beta (\rho V(\xi)) = 0$$

$$V(\xi) = -\frac{k}{l_0 \mu} D_{0\xi}^\gamma P(\xi, \tau) \quad (3.2)$$

Burada

$$D_{0\xi}^\beta f(\xi, t) = -\frac{\sec(0.5\beta)}{2\Gamma(2-\beta)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \tau)}{|\xi - \xi'|^{\beta-1}} d\xi' - \text{Riss-Veyl törəməsidir.}$$

(3.2) tənliklər sistemini aşağıdakı bir tənliyə gətirmək olar.

$$l_0 \partial_{0\tau}^a (m\rho) - t_0 D_{0\xi}^\beta \left(\frac{k\rho}{\mu} \rho D_{0\xi}^\gamma P(\xi, \tau) \right) = 0 \quad (3.3)$$

(3.3) tənliyi $\rho = \rho(P, T)$ hal tənliyi ilə birlikdə qapalı sistem təşkil edir. Mühitdə məsaməlilik əmsalı sabit olduqda sıxılmayan maye üçün (3.3) tənliyi aşağıdakı şəkllə düşür.

$$\partial_{0\tau}^a P(\xi, \tau) = B_0 D_{0\xi}^\beta \left\{ D_{0\xi}^\gamma P(\xi, \tau) \right\} \quad (3.4)$$

Burada $B_0 = \frac{bkt_0}{ml_0^2\mu}$.

Başlanğıc şərt olaraq $P(\xi, 0) = B(\xi)$ götürülür. Burada P – mayenin laydaxili təzyiqi, μ – mayenin mütləq özlülüyü, k – mühitin keçiriciliyi, β – mayenin həcmi elastiklik moduludur.

$\beta = \gamma = 1$ olan halda (3.4) tənliyini aşağıdakı kimi yazmaq olar.

$$\partial_{0\tau}^a P(\xi, \tau) = B_0 \frac{d^2}{d\xi^2} P(\xi, \tau). \quad (3.5)$$

Bu tənliyin $P(\xi, 0) = P_0 = const$ başlanğıc şərtini ödəyən ümumi həllini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$P(x, t) = P_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \cdot E_{\alpha,1}(-B_0 k^2 t^\alpha) dk, \quad (3.6)$$

(3.6) ifadəsində $\alpha = 1$ olarsa elmi ədəbiyyatdan məlum olan həll alınır

$$P(\xi, \tau) = \frac{P_0}{\sqrt{4\pi A\tau}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\xi - \xi')^2}{4A\tau}\right) d\xi',$$

$\alpha = 0.5$; $\alpha = 0.25$ olduqda $E_{\alpha,\alpha}(-z^\alpha)$ – Mittaq-Lefler funksiyasıdır.

Bu funksiyanı

$$E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-\sqrt{z}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \sqrt{z} \cdot e^z (1 - erf(\sqrt{z})),$$

$$E_{\frac{1}{4},\frac{1}{4}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{4})} \cdot F_1\left(1; \frac{1}{4}; z\right) + \frac{\sqrt{z}}{\Gamma(\frac{3}{4})} F_1\left(1; \frac{3}{4}; z\right) - z^{\frac{3}{4}} \cdot e^z \cdot (1 + erf(\sqrt{z})) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad (3.7)$$

kimi də təsvir etmək mümkündür. Xüsusi halda $B(\xi) = \delta(\xi)$ olduqda (3.6) ifadəsi aşağıdakı şəkllə düşür:

$$P(\xi, \tau) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\infty E_{\alpha,1}(-B_0 \tau^\alpha k^2) \cos(k\xi) d\xi$$

Bu həlldən isə $\alpha = 1$ olduqda məlum ifadəni alırıq:

$$P(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi B_0 \tau}} \cdot \exp\left(-\frac{\xi^2}{4B_0 \tau}\right)$$

4. Nəticə. Təqdim olunan işdə fraktal strukturlu məsaməli mühitlərdə qeyri-lokal köçürmə proseslərinin riyazi modelləşməsinin bəzi xüsusiyyətlərinə baxılmışdır. Süzülmə qanunlarını və məsaməli mühitlərin fraktal xüsusiyyətlərini nəzərə alan faktorların analizi əsasında kəsr tərtibli diferensiallama və inteqrallama formalizmindən istifadə edərək laylı məsaməli mühitlərdə mayələrin süzülməsi məsələsinin riyazi modeli təklif olunmuşdur. Məsamələrin həndəsi yerləşməsinə modelləşdirmək üçün kəsr ölçülü fəzalardan istifadə olunması daha məqsədəuyğundur. Kəsr tərtibli diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin tətbiqi ənənəvi yanaşmalarda tədqiqi mümkün olmayan bir çox amillərin əhatə olunmasını, daha geniş məsələlər qrupunun tədqiqini, məlum nəticələrin daha dərinlən anlaşılmasını, daha dəqiq yeni nəticələrin alınmasını mümkün edir. Mayələrin məsaməli mühitdə süzülmə məsələlərinin müəyyən konkret aspektlərdən öyrənilməsinə kəsr tərtibli inteqro-diferensial tənliklərin tətbiqi [1, s.27-54] işində hərtərəfli əsaslandırılmışdır. Biz məsələyə birbaşa və daha ümumi yanaşmanı tədqiq edəcəyik. Göründüyü kimi qurulmuş model fraktal strukturlarda süzülmə axınlarının kəmiyyətə daha geniş tədqiqinə imkan verir. İstifadə olunan kəsr tərtibli inteqro-diferensial formalizminin köməyilə əvvəllər məlum olan həllərin alınmasını və onların ümumiləşdirilməsini təmin edilir.

Kəsr tərtibli diferensiala keçid zaman və məkan daxilində qeyri-lokal proseslərin öyrənilməsində yeni yanaşmadır və bu proseslərin ən vacib kəmiyyət xarakteristikalarını təyin etməyə imkan verir.

Ədəbiyyat

1. Сербина Л.Н. Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. М. Наука, 2007, с.167.
2. Полубаринова-Кочина П.Я. и др. Математические методы в вопросах орошения. М. Наука, 1969, с.414.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск. Наука и техника, 1987, с.687.

A.B. Gasanov

Mathematical modeling of mass-exchange processes in porous media with fractal structure

Considers the use of mathematical modeling of mass transfer processes in the filtration of fluids in porous media with a fractal structure. Study of mass-exchange processes in media with a fractal structure requires the study of possible transformations in the phase of porosities, which in the future will allow the control of the productivity of the medium.

Keywords: fractal structures, viscoelastic medium, variable pore structure, filtration problem

УДК 539.622

A.B. Gasanov

Математическое моделирование процессов массообмена в пористых средах с фрактальной структурой

The problem of using mathematical modeling for mass transfer processes in the filtration of fluids in porous media with a fractal structure is considered. The study of mass-exchange processes in fractal-structure media requires investigating possible transformations in the phase of porosity, which in the future can give the opportunity to control the productivity of this medium.

Ключевые слова: фрактальные структуры, вязкоупругая среда, переменная структура пор, задача фильтрации

AMEA İdarəetmə Sistemləri İnstitutu

Təqdim olunub 17.10.2017