Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXVII, No.6, 2017
www.icp.az/2017/6-10.pdf

УДК 519.863.34

С.И. ГАМИДОВ

О НЕВЫРОЖДЕННОМ НЕЙМАНОВСКОМ РАВНОВЕСИИ И НЕЙМАНОВСКОЙ ГРАНИ

Рассматривается двухсекторная модель экономической динамики. Доказывается единственность неймановских цен в случае, когда состояние равновесия невырожденное. Показано, что в двухсекторной модели существуют такие цены, отличные от неймановских, при которых возможен сбалансированный рост. Дается описание таких цен. Приводится описание неймановской грани в случае невырожденности.

Ключевые слова: состояние равновесия, сбалансированный рост, невырожденность

1. Введение. Рассматривается экономическая система, состоящая из двух секторов. Первый из них производит средства производства, второй – предметы потребления. Символы $\boldsymbol{K_i}$, $\boldsymbol{L_i}$, $\boldsymbol{\omega_i}$, $\boldsymbol{\nu_i}$ обозначают, соответственно, основные фонды, рабочую силу, среднюю заработную плату $(\boldsymbol{\omega_i > 0})$ и коэффициент сохранности фондов в $\boldsymbol{i}$-м $(\boldsymbol{i = 1, 2})$ секторе $(\boldsymbol{0 \le \nu_i \le 1})$.

Производственная деятельность секторов описывается производственной функцией $\boldsymbol{F_i(K, L)(i = 1, 2)}$. Вектор $\boldsymbol{(K_1,\ L_1,\ K_2,\ L_2), K_i \ge 0, L_i \ge 0, i = 1, 2}$ является состоянием модели. Двух продуктовая модель $\boldsymbol{Z}$ задается с помощью производственного отображения $\boldsymbol{a(x)}$ [1, с.97]:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{a(K_1, L_1, K_2, L_2) = \{(K_1', L_1', K_2', L_2') \mid K_1' \le \nu_1 \cdot K_1 + F_1(K_1, L_1) \cdot u_1,}\\ \boldsymbol{K_2' \le \nu_2 \cdot K_2 + F_1(K_1, L_1) \cdot u_2,\ \ u_1 + u_2 \le 1,\ \ L_1' \le F_2(K_2, L_2) \cdot v_1,}\\ \boldsymbol{L_2' \le F_2(K_2, L_2) \cdot v_2,\ \ \omega_1 \cdot v_1 + \omega_2 \cdot v_2 \le 1\}.}\end{gathered}$$

Предполагается, что производственная функция задана на конусе $\boldsymbol{R_+^2}$ и там неотрицательна, суперлинейна. Кроме того, $\boldsymbol{F_i(K, 0) = F_i(0, L) = 0}$. При этих предположениях отображение $\boldsymbol{a(x)}$ суперлинейно и, следовательно, $\boldsymbol{Z}$ – модель Неймана-Гейла [1, с.178-181].

Всюду ниже используются обозначения $\boldsymbol{f_i(\eta) = F_i(\eta, 1), i = 1, 2,}$ где $\boldsymbol{\eta = \frac{K}{L}}$– фондовооруженность; вектор цен $\boldsymbol{P}$ будет удобно записывать в виде:

$$\boldsymbol{P = (P^{11}, P^{12} \cdot \omega_1, P^{21}, P^{22} \cdot \omega_2),}$$

где $\boldsymbol{P^{11}}$ – цена единицы фондов в первом подразделении, $\boldsymbol{P^{12}}$ – цена единицы потребления в первом подразделении; подобный смысл имеют $\boldsymbol{P^{21}, P^{22}}$ во втором подразделении; предполагаем, что $\boldsymbol{P^{11} > 0, P^{21} > 0}$.

2. Постановка задачи. Неймановское равновесие характеризуется тем, что $\boldsymbol{\alpha_1(P) = \alpha_2(P)}$, где

$$\boldsymbol{\alpha_1(P) = g(b_1, c),} \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{\alpha_2(P) = h(b_2, d),} \tag{2.2}$$

$\boldsymbol{b_1, b_2, c}$ и $\boldsymbol{d}$ определены следующими соотношениями:

$$\boldsymbol{b_1 = \frac{P^{12}}{P^{11}},\quad b_2 = \frac{P^{22}}{P^{21}}\ ,\quad c = \max\left(1, \frac{P^{21}}{P^{11}}\right)\ ,}$$

$$\boldsymbol{d = \max\left(\frac{P^{12}}{P^{21}}, \frac{P^{22}}{P^{21}}\right)\ ,}$$

$$\boldsymbol{g(b_1, c) = \max_{\eta > 0} \frac{\nu_1 \cdot \eta + c \cdot f_1(\eta)}{\eta + b_1 \cdot \omega_1}\ ,}$$

$$\boldsymbol{h(b_2,d)=\max_{\eta>0}\frac{\nu_2\cdot\eta+d\cdot f_2(\eta)}{\eta+b_2\cdot\omega_2}}.$$

Представляет интерес рассмотреть такие цены $\boldsymbol{P=(P^{11},P^{12}\cdot\omega_1,P^{21},P^{22}\cdot\omega_2)(P^{11}>0,\ P^{21}>0)}$ необязательно неймановские, что $\boldsymbol{\alpha_1(P)=\alpha_2(P)}$. Оба подразделения после обмена по ценам $\boldsymbol{P}$ сбалансированы в том смысле, что растут одинаковыми темпами. Считаем, что $\boldsymbol{\omega_i\cdot\nu_i<s_i}$, где $\boldsymbol{s_i=\lim_{\eta\to+\infty}f_i(\eta)\,,i=1,2}$. Выясним, при каких ценах $\boldsymbol{P=(P^{11},P^{12}\cdot\omega_1,P^{21},P^{22}\cdot\omega_2)}$ справедливо равенство $\boldsymbol{\alpha_1(P)=\alpha_2(P)}$.

3. Методы решения. Поскольку $\alpha_1(P)$ и $\alpha_2(P)$ зависят не от самих координат P, а от их отношений, то перейдем к новым переменным:

$$\boldsymbol{q_1=\frac{P^{12}}{P^{11}}\,,\quad q_2=\frac{P^{22}}{P^{21}}\,,\quad q_3=\frac{P^{12}}{P^{21}}}\,. \tag{3.1}$$

Рассмотрим функции

$$\boldsymbol{\beta_1(q)=g(b_1,c)}\,,\quad \text{где}\quad \boldsymbol{b_1=q_1}\,,\quad \boldsymbol{c=\max\left(1,\frac{q_1}{q_3}\right)}\,; \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{\beta_2(q)=h(b_2,d)}\,,\quad \text{где}\quad \boldsymbol{b_2=q_2}\,,\quad \boldsymbol{d=\max(q_3,q_1)}\,; \tag{3.3}$$

Три переменные $\boldsymbol{q_1,\ q_2,\ q_3}$ связаны между собой одним уравнением $\boldsymbol{\beta_1(q)=\beta_2(q)}$. Исходя из этого, естественно считать, что одна из координат вектора $\boldsymbol{q=(q_1,q_2,q_3)}$ может быть выражена как функция двух других. Выясним вопрос о существовании такой функции. Зафиксируем $\boldsymbol{q_1,\ q_3}$. Заметим, что функция $\boldsymbol{\beta_1(q)}$ не зависит от $\boldsymbol{q_2}$, а $\boldsymbol{\beta_2(q)}$ не зависит от $\boldsymbol{q_1}$, т.е. $\boldsymbol{\beta_1(q)=\beta_1(q_1,\ q_3),\beta_2(q)=\beta_2(q_2,\ q_3)}$, где $\boldsymbol{\beta_1(q_1,\ q_3)=a=const}$, так как $\boldsymbol{q_1,\ q_3}$ фиксированы. Положим число $\boldsymbol{C}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{C=h(q_3)}, \tag{3.4}$$

где $\boldsymbol{h(q_3)=h(q_3,q_3)}$.

Теорема 1. Пусть $\boldsymbol{\omega_i\cdot\nu_i<s_i,i=1,2}$.

1) Множество точек $\boldsymbol{(q_1,\ q_3)}$, для которых существует число $\boldsymbol{q_2}$, обладающее тем свойством, что

$$\boldsymbol{\beta_1(q_1,q_3)=\beta_2(q_2,q_3)}, \tag{3.5}$$

представляет собой множество решений неравенства

$$\boldsymbol{\beta_1(q_1,q_3)\geq C}. \tag{3.6}$$

2) Если $\boldsymbol{(q_1,\ q_3)}$ удовлетворяет строгому неравенству

$$\boldsymbol{\beta_1(q_1,q_3)>C}, \tag{3.7}$$

то существует два значения $\boldsymbol{q_2}$, при которых выполняются условия (3.7).

3) Если $\boldsymbol{(q_1,\ q_3)}$ удовлетворяют равенству

$$\boldsymbol{\beta_1(q_1,q_3)=C}, \tag{3.8}$$

то существует единственное решение $\boldsymbol{q_2=q_3}$ – неймановские цены.

Замечание. Цены, рассмотренные в пункте 2 теоремы 1, не являются неймановскими.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a=\beta_1(q_1,q_3)}$. Легко показать, что $\boldsymbol{a>\nu_1}$. Для функции $\boldsymbol{\beta_2(q_2)=\beta_2(q_2,\ q_3)}$ имеем

$$\boldsymbol{\beta_2(q_2)=\begin{cases}h(q_2,q_3) & \text{при}\quad q_3\geq q_2,\\ h(q_2,q_2) & \text{при}\quad q_3\leq q_2.\end{cases}} \tag{3.9}$$

Обозначим

$$\boldsymbol{\tilde{f}_2(\eta)=q_3\cdot f_2(\eta)}. \tag{3.10}$$

Рассмотрим функции, определенные равенствами

$$\boldsymbol{\tilde{g}(q_2)=h(q_2,q_3)=\max_{\eta>0}\frac{\nu_2\cdot\eta+\tilde{f}_2(\eta)}{\eta+q_2\cdot\omega_2}}\,, \tag{3.11}$$

где функция $\tilde{\boldsymbol{f}}_2(\boldsymbol{\eta})$ определена формулой (3.10). Известно [3, с.173-176], что функция $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}_2)$ непрерывна, возрастает и $\lim\limits_{q_2\to+\infty} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}_2) = \frac{s_2}{\omega_2}$, $\lim\limits_{q_2\to+0} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}_2) = \boldsymbol{\nu}_2$ (см. рис. 1). Функция $\tilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{q}_2)$ непрерывна, убывает и $\lim\limits_{q_2\to\frac{s_2}{\nu_2\cdot\omega_2}} \tilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{q}_2) = \boldsymbol{\nu}_2$, $\lim\limits_{q_2\to+0} \tilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{q}_2) = \boldsymbol{\nu}_2 + \tilde{\boldsymbol{d}}_2$, где $\tilde{\boldsymbol{d}}_2 = \lim\limits_{\eta\to+\infty} \frac{\tilde{f}_2(\eta)}{\eta}$ (см. рис.1).

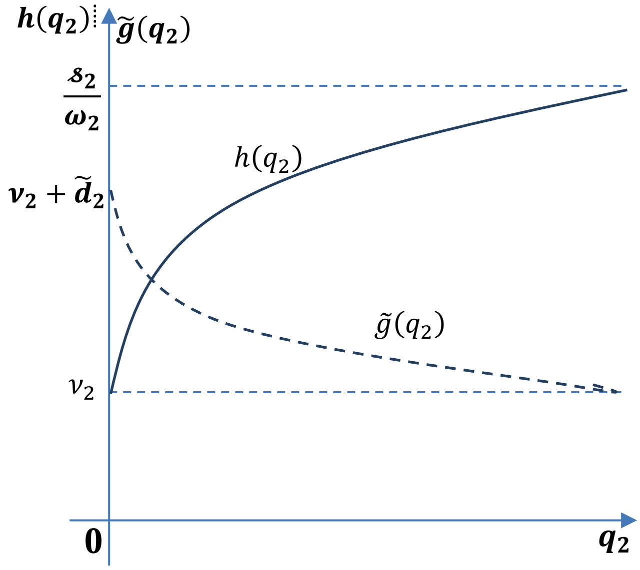

Рис. 1

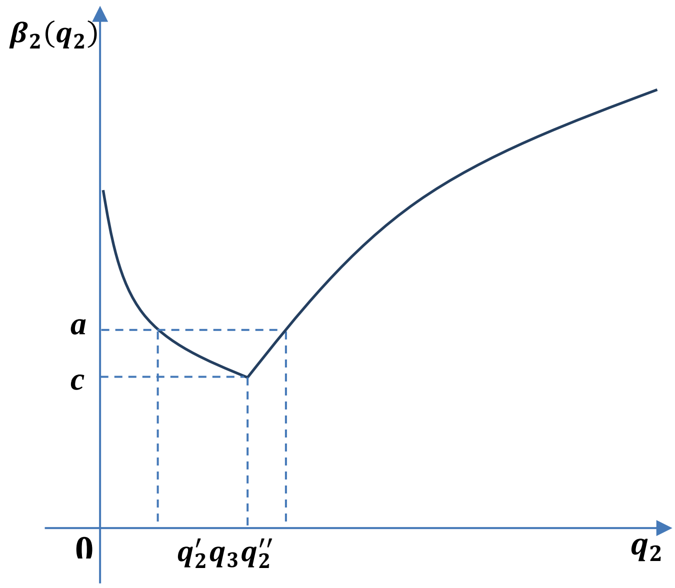

Рис. 2

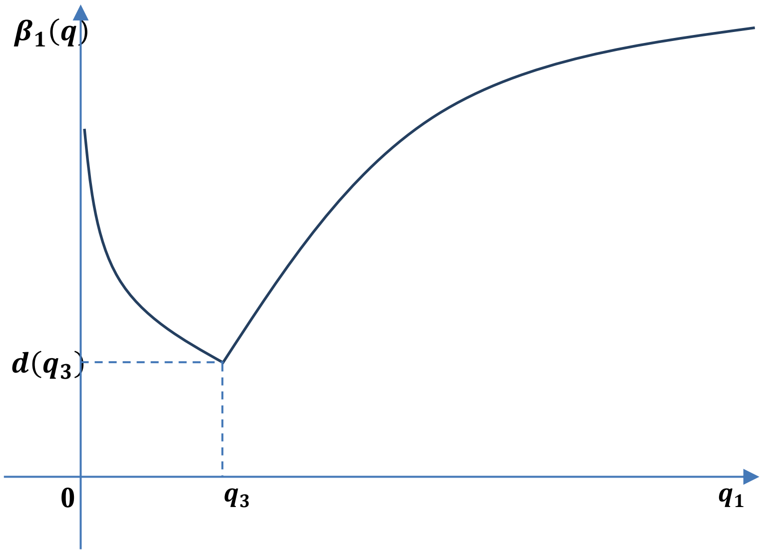

Рис. 3

Как видно из (3.9), функция $\boldsymbol{\beta_2(q_2)}$ может быть записана в следующем виде:

$$\boldsymbol{\beta_2(q_2)} = \begin{cases} \boldsymbol{\tilde{g}(q_2)} & \text{при} \quad \boldsymbol{q_3 \geq q_2,} \\ \boldsymbol{h(q_2)} & \text{при} \quad \boldsymbol{q_3 \leq q_2.} \end{cases} \qquad (\mathbf{3.12})$$

Следовательно, имеет место равенство (3.5) при всех $(\boldsymbol{q_1, q_3})$, удовлетворяющих неравенству (3.6). Уравнение $\boldsymbol{\beta_2(q_2) = a}$ при $\boldsymbol{a \geq c}$ имеет два значения $\boldsymbol{q'_2 \leq q_3}$ и $\boldsymbol{q''_2 \geq q_3}$ (см. рис.2).

Если $\boldsymbol{a < c}$, то решений нет, то есть при $\boldsymbol{\nu_1 < a < c}$ уравнение (3.5) решений не имеет (см. рис.2).

При $\boldsymbol{a = b_1(q_1, q_3) = c}$ уравнение (3.5) имеет единственное решение $\boldsymbol{q_2 = q_3}$ (см. рис.1); используя (3.1), получаем, что $\boldsymbol{P}$ – неймановские цены.

Теорема доказана.

Выясним область значения функции $\boldsymbol{\beta_1(q)}$ (см. рис.3). Зафиксируем $\boldsymbol{q_3}$, тогда из (3.2) имеем

$$\boldsymbol{\beta_1(q)} = \begin{cases} \boldsymbol{\tilde{h}(q_1)} & \text{при} \quad \boldsymbol{q_1 \geq q_3,} \\ \boldsymbol{g(q_1)} & \text{при} \quad \boldsymbol{q_1 \leq q_3,} \end{cases} \qquad (\mathbf{3.13})$$

где

$$\boldsymbol{\tilde{h}(q_1) = \max_{\eta > 0} \frac{\nu_1 \cdot \eta + q_1 \cdot \tilde{f}_1(\eta)}{\eta + q_1 \cdot \omega_1}} \ , \qquad (\mathbf{3.14})$$

$$\boldsymbol{\tilde{f}_1(\eta) = \frac{1}{q_3} \cdot f_1(\eta);}$$

$$\boldsymbol{g(q_1) = \max_{\eta > 0} \frac{\nu_1 \cdot \eta + f_1(\eta)}{\eta + q_1 \cdot \omega_1}} \ . \qquad (\mathbf{3.15})$$

Определим число $\boldsymbol{d(q_3)}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{d(q_3) = \beta_1(q_3) = g(q_3).} \qquad (\mathbf{3.16})$$

Тогда функция $\boldsymbol{\beta_1(q)}$ должна удовлетворять условию:

$$\boldsymbol{\beta_1(q_1, q_3) \geq d(q_3).} \qquad (\mathbf{3.17})$$

Замечание. При каждом $\boldsymbol{q_3}$ уравнение

$$\boldsymbol{\beta_2(q_2, q_3) = \beta_1(q_1, q_3)} \qquad (\mathbf{3.18})$$

имеет смысл рассматривать при $\boldsymbol{q_1}$ таких, что $\boldsymbol{\beta_1(q_1, q_3) = a \geq d(q_3)}$. Так как $\boldsymbol{\inf d(q_3) = \nu_1 < c}$, то существуют такие $\boldsymbol{q_1, q_3}$, что $\boldsymbol{\beta_1(q_1, q_3) < c}$. Для этих $(\boldsymbol{q_1, q_3})$ не существует такого

$\boldsymbol{q_2}$, при котором уравнение (3.18) имеет решение. Если $\boldsymbol{\beta_1(q_1,q_3)=a=c}$, то существует единственное решение $\boldsymbol{q_2}$ уравнения (3.18). При этом $\boldsymbol{P=(P^{11},P^{12}\cdot\omega_1,P^{21},P^{22}\cdot\omega_2)}$ – неймановские цены, где $\boldsymbol{q_1=\frac{P^{12}}{P^{11}}, q_2=\frac{P^{22}}{P^{21}}, q_3=\frac{P^{12}}{P^{21}}}$, а при $\boldsymbol{\beta_1(q_1,q_3)=a>c}$, то существует два решения $\boldsymbol{q_2}$ уравнения (3.18). Исходя из выше изложенного, получаем, что не существует такой функции, которая выражала бы одну из координат вектора $\boldsymbol{q=(q_1,q_2,q_3)}$ через две другие, так как $\boldsymbol{q_2}$ имеет два значения.

В связи с асимптотикой траектории рассматриваются неймановские грани. Всюду ниже нас будет интересовать только невырожденный случай, то есть $\boldsymbol{\alpha_1=\alpha_2}$.

Как известно [1, с.228], множество

$$\boldsymbol{N_\alpha=\mathbb{Z}\cap H_p},$$

где $\boldsymbol{H_p=\{(x,y)\mid[P,y]=\alpha\cdot[P,x]\},P}$ – неймановские цены, которые называются неймановской гранью данного состояния равновесия, где $\mathbb{Z}$ – конус модели $\boldsymbol{Z}$ [1, с.97; 2, с.113].

Построим неймановскую грань $\boldsymbol{N_\alpha}$ для модели $\boldsymbol{Z}$. Пусть
$\boldsymbol{x=(K_1,L_1,K_2,L_2),P=(P^{11},P^{12}\cdot\omega_1,P^{21},P^{22}\cdot\omega_2)=(1,b\cdot\omega_1,1,b\cdot\omega_2)}$ – неймановские цены.

По определению неймановской грани

$$\boldsymbol{N_\alpha=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\mid[P,y]=\alpha\cdot[P,x]\}}.$$

Пусть $\boldsymbol{\tilde{a}(x)}$ производственное отображение вида

$$\boldsymbol{a(K_1,L_1,K_2,L_2)=\{(K_1',L_1',K_2',L_2')\mid K_1'=v_1\cdot K_1+F_1(K_1,L_1)\cdot u_1,}$$
$$\boldsymbol{K_2'=v_2\cdot K_2+F_1(K_1,L_1)\cdot u_2,\ \ u_1+u_2=1,\ \ L_1'=F_2(K_2,L_2)\cdot\vartheta_1,}$$
$$\boldsymbol{L_2'=F_2(K_2,L_2)\cdot\vartheta_2,\ \ \omega_1\cdot\vartheta_1+\omega_2\cdot\vartheta_2=1\}}.$$

Теорема 2. Пусть $\boldsymbol{\alpha=\alpha_1=\alpha_2,P=(1,b\cdot\omega_1,1,b\cdot\omega_2)}$ – неймановские цены. Тогда, неймановская грань имеет следующий вид

$$\boldsymbol{N_\alpha=\left\{(x,y)\mid x=\left(\lambda\cdot(\bar{K}_1,\bar{L}_1),\mu\cdot(\bar{K}_2,\bar{L}_2)\right),\ \ y\in\tilde{a}(x),\ \ \lambda>0,\ \ \mu>0\right\}}. \qquad \boldsymbol{(3.19)}$$

Доказательство. Определим вектор $\boldsymbol{x}$, при котором выполняется равенство

$$\boldsymbol{q_p(x)=\alpha\cdot[P,x]}, \qquad \boldsymbol{(3.20)}$$

где $\boldsymbol{q_p(x)=\max\limits_{y\in a(x)}[P,y]}$.

Используя соотношение (3.5) [4, с.208], получим

$$\boldsymbol{q_p(x)=v_1\cdot K_1+v_2\cdot K_2+F_1(K_1,L_1)+b\cdot F_2(K_2,L_2)},$$
$$\boldsymbol{[P,x]=K_1+K_2+b\cdot\ \omega_1\cdot L_1+b\cdot\ \omega_2\cdot L_2}. \qquad \boldsymbol{(3.21)}$$

Из определения $\boldsymbol{\alpha}$ следует, что при всех $\boldsymbol{(K_i,L_i),i=1,2}$:

$$\boldsymbol{\alpha_1=\frac{v_1\cdot\bar{K}_1+F_1(\bar{K}_1,\bar{L}_1)}{\bar{K}_1+b\cdot\ \omega_1\cdot\bar{L}_1}\geq\frac{v_1\cdot K_1+F_1(K_1,L_1)}{K_1+b\cdot\ \omega_1\cdot L_1}};$$
$$\boldsymbol{\alpha_2=\frac{v_2\cdot\bar{K}_2+b\cdot F_1(\bar{K}_2,\bar{L}_2)}{\bar{K}_2+b\cdot\ \omega_2\cdot\bar{L}_2}\geq\frac{v_2\cdot K_2+b\cdot F_2(K_2,L_2)}{K_2+b\cdot\ \omega_2\cdot L_2}}.$$

где $\boldsymbol{(K_i,L_i),i=1,2}$ – точки, где достигаются максимумы.

Перепишем условие (3.20) для однопродуктовых моделей $\boldsymbol{Z_1}$ и $\boldsymbol{Z_2}$:

$$\begin{cases}\boldsymbol{q_p(x)=\alpha_1\cdot[P,x],\quad x=(\bar{K}_1,\bar{L}_1,0,0)};\\ \boldsymbol{q_p(x)=\alpha_2\cdot[P,x],\quad x=(0,0,\bar{K}_2,\bar{L}_2)}.\end{cases}$$

Итак, $\boldsymbol{q_p(x)=\alpha\cdot[P,x]}$ при $\boldsymbol{x=\left(\lambda(\bar{K}_1,\bar{L}_1),\mu(\bar{K}_2,\bar{L}_2)\right)}$. Иначе, для любого вектора $\boldsymbol{x}$ в (3.20), подставляя $\boldsymbol{\alpha=\alpha_1}$, получаем

$$\boldsymbol{v_1\cdot K_1+v_2\cdot K_2+F_1(K_1,L_1)+b\cdot F_2(K_2,L_2)\geq}$$
$$\boldsymbol{\geq\frac{v_1\cdot K_1+F_1(K_1,L_1)}{K_1+b\cdot\ \omega_1\cdot L_1}\cdot(K_2+b\cdot\ \omega_2\cdot L_2)}.$$

После преобразований имеем

$$\frac{\boldsymbol{\nu_2 \cdot K_2 + b \cdot F_2(K_2, L_2)}}{\boldsymbol{K_2 + b \cdot \ \omega_2 \cdot L_2}} \geq \frac{\boldsymbol{\nu_1 \cdot K_1 + F_1(K_1, L_1)}}{\boldsymbol{K_1 + b \cdot \ \omega_1 \cdot L_1}} \quad \forall \ (\boldsymbol{K_1, L_1, K_2, L_2}).$$

Следовательно, $\boldsymbol{x = \left(\lambda(\bar{K}_1, \bar{L}_1), \mu(\bar{K}_2, \bar{L}_2)\right): q_p(x) = \alpha \cdot [P, x]}$.

Теперь найдем вектора $\boldsymbol{\tilde{y}}$ такие, что

$$\boldsymbol{q_p(x) = \max_{y \in a(x)} [P, y] = [P, \tilde{y}]},$$

$$\boldsymbol{[P, \tilde{y}] = \alpha \cdot [P, x], \tilde{y} \in \tilde{a}(x)},$$

где $\boldsymbol{x = \left(\lambda(\bar{K}_1, \bar{L}_1), \mu(\bar{K}_2, \bar{L}_2)\right)}$.

Пусть $\boldsymbol{\tilde{y} = \left(\tilde{K}_1, \tilde{L}_1, \tilde{K}_2, \tilde{L}_2\right)}$, тогда

$$\boldsymbol{[P, \tilde{y}] = \tilde{K}_1 + \tilde{K}_2 + b \cdot \ \omega_1 \cdot \tilde{L}_1 + b \cdot \ \omega_2 \cdot \tilde{L}_2 =}$$
$$\boldsymbol{= \alpha \cdot (\lambda \cdot \bar{K}_1 + \mu \cdot \bar{K}_2 + \lambda \cdot b \cdot \ \omega_1 \cdot \bar{L}_1 + \mu \cdot b \cdot \ \omega_2 \cdot \bar{L}_2) = \alpha \cdot [P, x].} \qquad (\boldsymbol{3.22})$$

Вектор $\boldsymbol{\tilde{y} \in \tilde{a}(x)}$ означает, что

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tilde{K}_1 = \nu_1 \cdot \lambda \cdot \bar{K}_1 + \lambda \cdot F_1(\bar{K}_1, \bar{L}_1) \cdot u_1,} \\ \boldsymbol{\tilde{K}_2 = \nu_2 \cdot \lambda \cdot \bar{K}_2 + \lambda \cdot F_1(\bar{K}_1, \bar{L}_1) \cdot u_2,} \end{cases} \boldsymbol{u_1 + u_2 = 1,}$$
$$\begin{cases} \boldsymbol{\tilde{L}_1 = \mu \cdot F_2(\bar{K}_2, \bar{L}_2) \cdot \vartheta_1,} \\ \boldsymbol{\tilde{L}_2 = \mu \cdot F_2(\bar{K}_2, \bar{L}_2) \cdot \vartheta_2.} \end{cases} \boldsymbol{\omega_1 \cdot \vartheta_1 + \omega_2 \cdot \vartheta_2 = 1}$$

Подставив в (3.1), имеем

$$\boldsymbol{[P, \tilde{y}] = \nu_1 \cdot \lambda \cdot \bar{K}_1 + \nu_2 \cdot \mu \cdot \bar{K}_2 + \lambda \cdot F_1(\bar{K}_1, \bar{L}_1) + b \cdot \mu \cdot F_2(\bar{K}_2, \bar{L}_2)},$$

но известно, что

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{\nu_1 \cdot \lambda \cdot \bar{K}_1 + \lambda \cdot F_1(\bar{K}_1, \bar{L}_1)}{\lambda \cdot \bar{K}_1 + b \cdot \ \omega_1 \cdot \lambda \cdot \bar{L}_1} = \frac{\nu_2 \cdot \mu \cdot \bar{K}_2 + b \cdot \mu \cdot F_2(\bar{K}_2, \bar{L}_2)}{\mu \cdot \bar{K}_2 + b \cdot \ \mu \cdot \omega_2 \cdot \bar{L}_2}}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{\alpha \cdot [P, x] = \frac{\nu_1 \cdot \lambda \cdot \bar{K}_1 + \lambda \cdot F_1(\bar{K}_1, \bar{L}_1)}{\lambda \cdot \bar{K}_1 + b \cdot \ \omega_1 \cdot \lambda \cdot \bar{L}_1} \cdot (\lambda \cdot \bar{K}_1 + b \cdot \ \omega_1 \cdot \lambda \cdot \bar{L}_1) +}$$
$$\boldsymbol{+ \frac{\nu_2 \cdot \mu \cdot \bar{K}_2 + b \cdot \mu \cdot F_2(\bar{K}_2, \bar{L}_2)}{\mu \cdot \bar{K}_2 + b \cdot \ \mu \cdot \omega_2 \cdot \bar{L}_2} \cdot (\mu \cdot \bar{K}_2 + b \cdot \ \mu \cdot \omega_2 \cdot \bar{L}_2) = [P, \tilde{y}].}$$

Как видно, полученное соотношение получается для $\forall \ \boldsymbol{y \in \tilde{a}(x)}$.

Теорема доказана.

4. Выводы.

– Доказана единственность Неймановских цен в случае, когда состояние равновесия невырожденное;

– Показано существование таких цен, отличных от Неймановских, при которых возможен сбалансированный рост;

– Приведено описание таких цен;

– Приведено описание Неймановский грани в случае невырожденности.

Литература

1. Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия, М., Наука, 1973, 336 с.
2. Никаидо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика, М., Наука, 1972.
3. Рубинов А.М. Математические модели расширенного воспроизводства, Л., Наука, 1983.
4. Hamidov S.I. On a consumer problem, Pure and Applied Mathematics Journal, 2016, Vol.5, № 6, pp. 205-210.

UOT 519.863.34

S.İ. Həmidov

Cırlaşmayan Neyman tarazlığı və Neyman üzləri haqqında

İki-sektorlu iqtisadi dinamika modelinə baxılır. Dayanaqlıq halları cırlaşan olmayan halda Neyman qiymətlərinin yeganəliyi isbat edilir. Sektorların balanslaşdırılmış artımını təmin edən Neyman qiymətlərindən fərqli olan qiymətlərin varlığı isbat edilir və bu qiymətlərin təsviri verilir. Çırlaşma olmayan halda Neyman üzlərinin təsiri verilir.

Açar sözlər: tarazlıq, balanslaşdırılmış artım, cırlaşmayan hal

S.I. Hamidov

On a non-degenerate Neumann equilibrium of the Neumann edge

We consider a two-sector model of economic dynamics. The uniqueness of the Neumann prices is proved when the equilibrium state is non-degenerate. It is shown that there exist the prices in two-sector model that are different from Neumann ones, in which balanced growth is possible. A description of such prices is provided. The description of Neumann edges is given in the case of non-degeneracy.

Keywords: equilibrium, balanced growth, non-degeneracy

Бакинский Государственный Университет

Представлено 07.02.2017