Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXVIII, No.3, 2018
www.icp.az/2018/3-01.pdf

УДК 519.95

Ф.Г. ФЕЙЗИЕВ, М.Р. МЕХТИЕВА

ДВУХЗНАЧНЫЙ АНАЛОГ ПОЛИНОМА ВОЛЬТЕРРЫ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛНОЙ РЕАКЦИИ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ДВОИЧНЫХ МНОГОМЕРНЫХ МОДУЛЯРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЕГО КОЭФФИЦИЕНТОВ

Рассматривается вопрос представления полной реакции некоторых классов $2D$-двоичных многомерных модулярных динамических систем в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры. Предлагается рекуррентная формула для нахождения неизвестных коэффициентов этого полинома при известных входной и выходной последовательностях рассматриваемой системы.

Ключевые слова: $2D$-двоичные многомерные модулярные динамические системы, полиномы Вольтерры, неизвестные коэффициенты, рекуррентные формулы

1. Введение. Конечные последовательностные машины или модулярные динамические системы (МДС) [1, с.9-226; 2, с.12-39; 3, с.11-39] функционируют над конечными полями и являются одним из широко используемых классов дискретных управляющих систем. Линейные классы МДС достаточно исследованы и получены важные результаты в теоретическом и прикладном аспекте [4, с.127-154]. Они находят широкое применение в различных областях, например, в вычислительной технике, в системах диагностики, кодировании и декодировании дискретных сообщений, криптографии, зашиты данных и программного обеспечения ЭВМ, в кардиометрии и т.д. [5; 6, с.3-27; 7; 8, с.69-71; 9, с.26-33]. Нелинейные классы МДС исследованы недостаточно. Отметим, что линейные классы МДС не пригодны для моделирования дискретных динамических процессов. Наличие нелинейных членов, образующих нелинейные МДС, позволит их применение при моделировании и управлении различных процессов [10, с.6-63]. Для развития теории и приложения нелинейных МДС (НМДС) прежде всего необходимо найти формулу для их общего представления. К настоящему времени получены формулы в виде двухзначных аналогов полинома Вольтерры для представления некоторых классов одноправметрических и многопараметрических классов МДС [11, с.33-50]. В данной работе рассматривается вопрос аналитического представления двухпараметрических двоичных многомерных модулярных динамических систем (**2D**-ММДС), заданных входно-выходными соотношениями и вывод формулы для нахождения неизвестных коэффициентов этого представления при известных значениях входных и выходных последовательностей.

2. Постановка задачи. Рассмотрим $2D$-ММДС с фиксированной памятью n_0 и ограниченной связью P, полная реакция которой характеризуется следующим функциональным соотношением:

$$y[n,c] = G\{u[\tau, c+p] | n-n_0 \le \tau \le n,\ \ p \in P\},\ GF(2). \tag{2.1}$$

Здесь $n \in Z_0$; $c \in Z$; $p \in P$; где Z и Z_0 есть множество целых и неотрицательных целых чисел соответственно; $G\{\dots\} = \{G_1\{\dots\}, \dots, G_k\{\dots\}\}^T$; $y[n,c] \in GF^k(2)$ и $u[n,c] \in GF^r(2)$ есть выходная и входная последовательности $2D$-ММДС.

Пусть $P = \{p(1), \dots, p(R)\}$, $p(1) < \dots < p(R)$, $p(j) \in \{\dots, -1,0,1, \dots\}$, $j = \overline{1,R}$, и кроме того, $p(1)$ и $p(R)$ конечные целые числа.

Задача аналитического представления полной реакции $2D$–ММДС (2.1) состоит в представлении оператора $G\{\dots\}$ в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры и в определении неизвестных коэффициентов этого полинома при известных входной и выходной последовательностях рассматриваемой $2D$-ММДС.

3. Полиномиальное соотношение для представления полной реакции $2D$***-ММДС.*** В (3.1) для каждой $\nu \in \{1, \dots, k\}$ оператор $G_\nu\{\dots\}$ можно записать в виде функции f_ν, зависящих от $(n_0+1)rR$ аргументов и эти аргументы суть элементы множества

$$U = \left\{u_j[\tau, c+p(\sigma)] \middle| n-n_0 \le \tau \le n, \quad j=\overline{1,r}, \ \sigma=\overline{1,R}\right\}. \tag{3.1}$$

В каждой точке (n,c) модулярную функцию $f_\nu(\dots)$ можно представить в виде полинома над конечным полем $GF(2)$ с помощью произведения элементов множества U в различных возможных комбинациях. В возможных разных комбинациях произведений элементов из U число множителей может быть от нуля до $(n_0+1)rR$ и количество таких произведений суть $2^{(n_0+1)rR}$. Такие произведения имеют коэффициенты из поля $GF(2)$.

Выберем произвольное значение $i \in \{0, \dots, (n_0+1)rR\}$ и рассмотрим произведения элементов из (3.1) в различных комбинациях, степень нелинейности (т.е. количество множителей), которых равна i. Пусть в произвольно выбранном произведении для каждых $j \in \{1, \dots, r\}$ и $p(\sigma) \in P$ из множества

$$U_{j,\sigma} = \left\{u_j[\xi, c+p(\sigma)] \middle| \xi = 0,1,\dots,n_0\right\}$$

участвуют множители, число которых суть $m_{j,\sigma}$. Тогда, должно быть удовлетворено следующее равенство:

$$m_{1,1} + \dots + m_{1,R} + \dots + m_{r,1} + \dots + m_{r,R} = i.$$

Пусть

$$\Phi(i) = \left\{\overline{m} = ((m_{1,1}, \dots, m_{1,R}), \dots, (m_{r,1}, \dots, m_{r,R})) \middle| m_{j,\sigma} \in \{0, \dots, n_0+1\},\right.$$
$$\left. j=\overline{1,r}, \ \sigma=\overline{1,R}, \ m_{1,1} + \dots + m_{1,R} + \dots + m_{r,1} + \dots + m_{r,R} = i\right\}, \tag{3.2}$$

$$Q(i,\overline{m}) = \left\{\ell \middle| \ell \in \{1, \dots, r\} \text{ и } m_{\ell,1} + \dots + m_{\ell,R} \ne 0\right\}, \tag{3.3}$$

$$Q_1(i,\overline{m},j) = \{\sigma_j \,|\, \sigma_j \in \{1, \dots, R\} \text{ и } m_{j,\sigma_j} \ne 0\}. \tag{3.4}$$

Для каждой $\overline{m} \in \Phi(i)$ произведение со степенью нелинейности i в общем виде можно записать следующим образом:

$$\prod_{j \in Q(i,\overline{m})} \prod_{\sigma_j \in Q_1(i,\overline{m},j)} \prod_{\xi_{i,\sigma_j}=1}^{m_{i,\sigma_j}} u_j[n-\tau(j,\sigma_j,\xi_{j,\sigma_j}), c+p(\sigma_j)]. \tag{3.5}$$

Фиксируем $i \in \{0, \dots, (n_0+1)rR\}$ и $\overline{m} \in \Phi(i)$. Для всех (j,σ_j), где $j \in Q(i,\overline{m})$, $\sigma_j \in \{1, \dots, R\}$, введем обозначения

$$\Gamma_1(m_{j,\sigma_j}) = \{\overline{\tau}\,(j,\sigma_j) = (\tau(j,\sigma_j,1), \dots, \tau(j,\sigma_j,m_{j,\sigma_j})) \,|\, 0 \le \tau(j,\sigma_j,1) < \cdots$$

$$\dots < \tau(j,\sigma_j,m_{j,\sigma_j}) \le n_0\}. \tag{3.6}$$

При $i \in \{0, \dots, (n_0+1)rR\}$ и $\overline{m} \in \Phi(i)$ для всех (j,σ_j), где $j \in Q(i,\overline{m})$, $\sigma_j \in \{1, \dots, R\}$, образуем из векторов $\overline{\tau}\,(j,\sigma_j)$ блочный вектор $\overline{\overline{\tau}}$. Множество всех блочных векторов (наборов) $\overline{\overline{\tau}}$ обозначим через $\Gamma(i,\overline{m})$. Очевидно, что каждому $\overline{\overline{\tau}} \in \Gamma(i,\overline{m})$ соответствует произведение вида (3.5). Таким образом, справедлива следующая теорема:

Теорема 1. Пусть имеют место соотношения (3.2)-(3.6). Тогда полная реакция $2D$-ММДС с фиксированной памятью n_0 и ограниченной связью P, характеризующаяся соотношением (2.1), может быть представлена в виде следующего двузначного аналога полинома Вольтерры:

$$y_\nu[n,c] = \sum_{i=0}^{(n_0+1)rR} \sum_{\overline{m} \in \Phi(i)} \sum_{\overline{\overline{\tau}} \in \Gamma(i,\overline{m})} K_{i,\nu,\overline{m}}\,[\overline{\overline{\tau}}] \prod_{j \in Q(i,\overline{m})} \prod_{\sigma_j \in Q_1(i,\overline{m},j)} \prod_{\xi_{i,\sigma_j}=1}^{m_{i,\sigma_j}} u_j[n -$$

$$-\tau(j,\sigma_j,\xi_{j,\sigma_j}),c+p(\sigma_j)],GF(2),\nu=1,\ldots,k. \qquad (3.7)$$

В случае $i=0$ набор $\overline{m}\in\Phi(i)$ суть набор нулевых значений и поэтому вместо коэффициента $K_{0,\nu,\overline{m}}[\overline{\tau}]$ будем писать $K_{0,\nu}$.

Полином Вольтерры в виде (3.7) является общим функциональным соотношением для $2D$-ММДС (1) с фиксированной памятью n_0 и ограниченной связью P. Значения коэффициентов $K_{0,\nu}$, $K_{i,\nu,\overline{m}}[\overline{\overline{\tau}}]$, $\nu=\overline{1,k}$ для всех $\overline{\overline{\tau}}\in\Gamma(i,\overline{m})$, $\overline{m}\in\Phi(i)$, $i\in\{0,\ldots,(n_0+1)rR\}$ зависят от значений входной и выходной последовательности $2D$-ММДС. Если в конкретном случае для какого-нибудь $i\in\{2,\ldots,(n_0+1)rR\}$ хотя бы один коэффициент из $K_{i,\nu,\overline{m}}[\overline{\overline{\tau}}]$, $\nu=\overline{1,k}$, $\overline{\overline{\tau}}\in\Gamma(i,\overline{m})$, $\overline{m}\in\Phi(i)$, не равен нулю, тогда соответствующий $2D$-ММДС суть $2D$-многомерным НМДС ($2D$-МНМДС), в противном случае – $2D$-многомерным линейным МДС ($2D$-МЛМДС). Ясно, что $2D$-МЛМДС имеет следующее представление:

$$y_\nu[n,c]=K_{0,\nu}+\sum_{j=1}^{r}\sum_{\sigma_j=1}^{R}\sum_{\tau(j,\sigma_j)=0}^{n_0}K_{1,\nu,j,\sigma_j}[\tau(j,\sigma_j)]u_j[n-\tau(j,\sigma_j),c+p(\sigma_j)],$$
$$GF(2),\ \nu=1,\ldots,k. \qquad (3.8)$$

4. Нахождение неизвестных коэффициентов полиномиальных представлений для полной $2D$-МНМДС. Пусть при заданных значениях входной последовательности $u_j[\gamma,c+p]$, $n-n_0\le\gamma\le n$, $p\in P$, $j=\overline{1,r}$, известны значения выходной последовательности. Найдем коэффициенты $K_{0,\nu}$, $K_{i,\nu,\overline{m}}[\overline{\tau}]$, $\nu=\overline{1,k}$ для всех $\overline{\overline{\tau}}\in\Gamma(i,\overline{m})$, $\overline{m}\in\Phi(i)$, $i\in\{1,\ldots,(n_0+1)rR\}$ в полиноме (3.7) соответствующие известным входной и выходной последовательностям.

Число неизвестных коэффициентов в полиноме (3.7) составляет $\boldsymbol{2^{(n_0+1)rR}}$. Число всевозможных различных наборов значений $\boldsymbol{u_j[\gamma,c+p]}$, $\boldsymbol{n-n_0\le\gamma\le n}$, $\boldsymbol{p\in P}$, $\boldsymbol{j=\overline{1,r}}$, так же равно $\boldsymbol{2^{(n_0+1)rR}}$. Учитывая в правой части полинома (3.7) всевозможные различные наборы значений $\boldsymbol{u_j[\gamma,c+p]}$, $\boldsymbol{n-n_0\le\gamma\le n}$, $\boldsymbol{p\in P}$, $\boldsymbol{j=\overline{1,r}}$, можно получить систему над $\boldsymbol{GF(2)}$ из $\boldsymbol{2^{(n_0+1)rR}}$ линейных алгебраических уравнений с $\boldsymbol{2^{(n_0+1)rR}}$ неизвестными. Следует заметить, что коэффициенты неизвестных в этой системе образуются из произведений известных значений $\boldsymbol{u_j[\gamma,c+p]}$, $\boldsymbol{n-n_0\le\gamma\le n}$, $\boldsymbol{p\in P}$, $\boldsymbol{j=\overline{1,r}}$. Ясно, что эта система имеет единственное решение. Однако при возрастании значений $\boldsymbol{n_0}$, $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{R}$ решить эту систему известными методами, например методом Крамера, Гаусса и другими, очень сложно. Структура полученной системы алгебраических уравнений такова, что для ее решения можно построить рекуррентные соотношения. Для этого введем обозначение:

$$\boldsymbol{x(j,\sigma,\tau)=u_j[n-\tau,c+p(\sigma)],\ \tau=\overline{0,n_0},\ \sigma=\overline{1,R},\ j=\overline{1,r},} \qquad (4.1)$$

с помощью которого получим

$$y_\nu[n,c]=f_\nu\big(x(1{,}1{,}0),\ldots,x(1{,}1,n_0),\ldots,x(1,R,n_0),\ldots,x(r,R,n_0)\big).$$

Ясно, что

$$K_{0,\nu}=f_\nu(0,\ldots,0,\ldots,0,\ldots,0),\ \nu=1,\ldots,k. \qquad (4.2)$$

Положим

$$X=\{x(j,\sigma,\tau)|\tau=\overline{0,n_0},\ \sigma=\overline{1,R},\ j=\overline{1,r}\}.$$

Пусть $x(j,\sigma,\tau)\in X$ является единственной переменной из множества X, принимающей значение 1, а остальные переменные из X принимают значения 0, где $\tau\in\{0,\ldots,n_0\}$, $\sigma\in\{1,\ldots,R\}$, $j\in\{1,\ldots,r\}$. В этом случае обозначим значение функции $f_\nu(\ldots)$ через $f_\nu(x(j,\sigma,\tau)=1)$. Учитывая значения переменных множества X, из (3.7) получаем

$$K_{1,\nu,\left((1_{j,\sigma})\right)}\left[\left((\tau)\right)\right]=K_{0,\nu}+f_\nu(x(j,\sigma,\tau)=1),GF(2),\nu=1,\ldots,k, \qquad (4.3)$$

где через $((1_{j,\sigma}))$ обозначен элемент $\overline{m} \in \Phi(1)$, в котором $m_{j,\sigma} = 1$, а остальные компоненты этого элемента суть 0.

Пусть $x(j,\sigma,\tau_1), x(j,\sigma,\tau_2) \in X$ и $x(j,\sigma,\tau_1) = 1$, $x(j,\sigma,\tau_2) = 1$, где $\tau_1,\tau_2 \in \{0,\dots,n_0\}$, $\sigma \in \{1,\dots,R\}$, $j \in \{1,\dots,r\}$, а остальные переменные из X принимают значения 0. В этом случае обозначим через $f_\nu(x(j,\sigma,\tau_1), x(j,\sigma,\tau_2) = 1)$ значение функции $f_\nu(\dots)$. Учитывая значения переменных множества X, из (3.7) получаем

$$K_{2,\nu,\left((2_{j,\sigma})\right)}\left[\left((\tau_1,\tau_2)\right)\right] = K_{0,\nu} + K_{1,\nu,\left((1_{j,\sigma})\right)}\left[\left((\tau_1)\right)\right] + K_{1,\nu,\left((1_{j,\sigma})\right)}\left[\left((\tau_2)\right)\right] + \\ + f_\nu(x(j,\sigma,\tau_1), x(j,\sigma,\tau_2) = 1), GF(2), \nu = 1,\dots,k, \quad (4.4)$$

где через $((2_{j,\sigma}))$ обозначен элемент $\overline{m} \in \Phi(2)$, в котором $m_{j,\sigma} = 2$ а остальные компоненты этого элемента суть 0.

Пусть $x(j,\sigma_1,\tau_1), x(j,\sigma_2,\tau_2) \in X$ и $x(j,\sigma_1,\tau_1) = 1$, $x(j,\sigma_2,\tau_2) = 1$, где $\tau_1,\tau_2 \in \{0,\dots,n_0\}$, $\sigma_1,\sigma_2 \in \{1,\dots,R\}$, $j \in \{1,\dots,r\}$, а остальные переменные из X принимают значения 0. В этом случае значение функции $f_\nu(\dots)$ обозначим через $f_\nu(\dots x(j,\sigma_1,\tau_1), x(j,\sigma_2,\tau_2) = 1)$. Учитывая значения переменных множества X, из (3.7) получаем

$$K_{2,\nu,\left((1_{j,\sigma_1},1_{j,\sigma_2})\right)}\left[\left((\tau_1),(\tau_2)\right)\right] = K_{0,\nu} + K_{1,\nu,\left((1_{j,\sigma_1})\right)}\left[\left((\tau_1)\right)\right] + \\ + K_{1,\nu,\left((1_{j,\sigma_2})\right)}\left[\left((\tau_2)\right)\right] + f_\nu(x(j,\sigma_1,\tau_1), x(j,\sigma_2,\tau_2) = 1), \ GF(2), \nu = 1,\dots,k, \quad (4.5)$$

где через $((1_{j,\sigma_1}, 1_{j,\sigma_2}))$ обозначен элемент $\overline{m} \in \Phi(2)$, в которой $m_{j,\sigma_1} = 1, m_{j,\sigma_2} = 1$, а остальные компоненты этого элемента суть 0.

Пусть $x(j_1,\sigma_{j_1},\tau_1), x(j_2,\sigma_{j_2},\tau_2) \in X$ и $x(j_1,\sigma_{j_1},\tau_1) = 1$, $x(j_2,\sigma_{j_2},\tau_2) = 1$, где $\tau_1,\tau_2 \in \{0,\dots,n_0\}$, $\sigma_{j_1},\sigma_{j_2} \in \{1,\dots,R\}$, $j_1,j_2 \in \{1,\dots,r\}$, а остальные переменные из X принимают значения 0. В этом случае значение функции $f_\nu(\dots)$ обозначим через $f_\nu(x(j_1,\sigma_{j_1},\tau_1), x(j_2,\sigma_{j_2},\tau_2) = 1)$. Учитывая значения переменных множества X, из (3.7) получаем

$$K_{2,\nu,((1_{j_1,\sigma_{j_1}}),(1_{j_2,\sigma_{j_2}}))}\left[\left((\tau_1),(\tau_2)\right)\right] = K_{0,\nu} + K_{1,\nu,((1_{j_1,\sigma_{j_1}}))}[((\tau_1))] + \\ + K_{1,\nu,((1_{j_2,\sigma_{j_2}}))}[((\tau_2))] + f_\nu(x(j_1,\sigma_{j_1},\tau_1), x(j_2,\sigma_{j_2},\tau_2) = 1), GF(2), \nu = 1,\dots,k, \quad (4.6)$$

где через $((1_{j_1,\sigma_{j_1}}), (1_{j_2,\sigma_{j_2}}))$ обозначен элемент $\overline{m} \in \Phi(2)$, в которой $m_{j_1,\sigma_{j_1}} = 1, m_{j_2,\sigma_{j_2}} = 1$ а остальные компоненты этого элемента суть 0.

Аналогично получению формул (4.3)-(4.6), нетрудно доказать справедливость следующих утверждений.

Утверждение 1. Пусть $x(j,\sigma,\tau_\xi) \in X$ и $x(j,\sigma,\tau_\xi) = 1$, $\xi = \overline{1,\ell}$, где $\ell \le n_0 + 1$, $0 \le \tau_1 < \dots < \tau_\ell \le n_0, \sigma \in \{1,\dots,R\}$, $j \in \{1,\dots,r\}$, а остальные переменные из X принимают значения 0. При этом через $f_\nu(x(j,\sigma,\tau_\xi) = 1 | \xi = \overline{1,\ell})$ обозначено значение функции $f_\nu(\dots)$. Тогда справедливо

$$K_{\ell,\nu,((\ell_{j,\sigma}))}\left[\left((\tau_1,\dots,\tau_\ell)\right)\right] = f_\nu\left(x(j,\sigma,\tau_\xi) = 1 \middle| \xi = \overline{1,\ell}\right) + \\ + \sum_{\beta=0}^{\ell-1} \sum_{(\pi_1,\dots,\pi_\beta)\in\Omega_\beta(\ell)} K_{\beta,\nu,((\beta_{j,\sigma}))}[((\tau_{\pi_1},\dots,\tau_{\pi_\beta}))], \ \nu = 1,\dots,k, GF(2), \quad (4.7)$$

где $\Omega_\beta(\ell) = \{(\pi_1,\dots,\pi_\beta) | 1 \le \pi_1 < \dots < \pi_\beta \le \ell\}$ и через $((\beta_{j,\sigma}))$ обозначен элемент $\overline{m} \in \Phi(\beta)$, в котором $m_{j,\sigma} = \beta$, а остальные компоненты этого элемента суть 0.

Утверждение 2. Пусть $x(j,\sigma_\alpha,\tau_\alpha) \in X$ и $x(j,\sigma_\alpha,\tau_\alpha) = 1$, $\alpha = \overline{1,\theta}$, где $\theta \le r$, $j \in \{1,\dots,r\}$, $\tau_\alpha \in \{0,\dots,n_0\}$, $\sigma_\alpha \in \{1,\dots,R\}$, а остальные переменные из X принимают значения

0. При этом через $f_\nu(\, x(j,\sigma_\alpha,\tau_\alpha)=1 \big| \alpha=\overline{1,\theta}\,)$ обозначено значение функции $f_\nu(\dots)$. Тогда справедливо

$$K_{\theta,\nu,((1_{j,\sigma_1},\dots,1_{j,\sigma_\theta}))}[((\tau_1),\dots,(\tau_\theta))] = f_\nu(\, x(j,\sigma_\alpha,\tau_\alpha)=1 \big| \alpha=\overline{1,\theta}\,) +$$

$$+\sum_{\eta=0}^{\theta-1}\sum_{(\rho_1,\dots\rho_1)\in N_\beta(\theta)} K_{\eta,\nu,((1_{j,\sigma_1},\dots,1_{j,\sigma_\eta}))}[((\tau_{\rho_1}),\dots,(\tau_{\rho_\eta}))]\,, GF(2), \tag{4.8}$$

где $\mathrm{N}_\eta(\theta)=\{(\rho_1,\dots,\rho_\eta)\big|1\le\rho_1<\dots<\rho_\eta\le\theta\}$.

Пусть $x(j,\sigma_\alpha,\tau(\alpha,\xi))\in X$ и $x(j,\sigma_\alpha,\tau(\alpha,\xi))=1$, $\xi=\overline{1,\ell_\alpha}$, $\alpha=\overline{1,\theta}$, где $\theta\le r$, $\ell_\alpha\le n_0+1$, $j\in\{1,\dots,r\}$, $\tau(\alpha,\xi)\in\{0,\dots,n_0\}$, $\sigma_\alpha\in\{1,\dots,R\}$, а остальные переменные из X принимают значения 0. При этом значение функции $f_\nu(\dots)$ обозначено через $f_\nu(\, x\big(j,\sigma_\alpha,\tau(\alpha,\xi)\big)=1\big|\xi=\overline{1,\ell_\alpha}\ ,\alpha=\overline{1,\theta}\ )$. Пусть

$$S=\ell_1+\dots+\ell_\theta. \tag{4.9}$$

Построим полином, образованный из элементов множества D, где

$$D=\{x\big(j,\sigma_\alpha,\tau(\alpha,\xi)\big)\big|\xi=\overline{1,\ell_\alpha},\alpha=\overline{1,\theta}\,\}.$$

Ясно, что этот полином имеет степень, равную числу S. Пусть $\eta\in\{0,\dots,S\}$. Рассмотрим произведения элементов из множества D в различных комбинациях, степень нелинейности, т.е. количество множителей, которых равна η. Пусть в произвольно выбранном произведении для каждых $\alpha\in\{1,\dots,\theta\}$ из множества $\{x\big(j,\sigma_\alpha,\tau(\alpha,\xi)\big)\big|\xi=\overline{1,\ell_\alpha}\}$ участвуют множители, число которых суть β_α. Тогда, должно быть удовлетворено равенство $\beta_1+\dots+\beta_\theta=\eta$.

Пусть

$$\begin{gathered}
\bar\ell=(\ell_1,\dots,\ell_\theta),\\
F_1(\eta,\theta,\bar\ell)=\{\big(b,\bar\beta,\bar\rho\big)|1\le b\le\theta,\ \bar\beta=\big(\beta_{\rho_1},\dots,\beta_{\rho_b}\big),1\le\beta_{\rho_\alpha}\le\ell_{\rho_\alpha},\alpha=\overline{1,b},\\
\bar\rho=(\rho_1,\dots,\rho_b)\in N_{\,b}(\theta),\quad \beta_{\rho_1}+\dots+\beta_{\rho_b}=\eta\},\\
N_b(\theta)=\{(\rho_1,\dots,\rho_b)|1\le\rho_1<\dots<\rho_b\le\theta\},\\
\Omega_{\beta_{\rho_\alpha}}(\ell_{\rho_\alpha})=\{\bar\pi_\alpha=(\pi_{\alpha,1},\dots,\pi_{\alpha,\beta_{\rho_\alpha}})\Big|1\le\pi_{\alpha,1}<\dots<\pi_{\alpha,\beta_{\rho_\alpha}}\le\ell_{\rho_\alpha}\},\\
\Omega_{b,\bar\beta,\bar\rho}(\bar\ell)=\prod_{\alpha=1}^{b}\Omega_{\beta_{\rho_\alpha}}\big(\ell_{\rho_\alpha}\big).
\end{gathered}\tag{4.10}$$

Тогда полином, образованный из элементов множества D можно записать в следующем виде:

$$f_\nu\big(x(j,\sigma_\alpha,\tau(\alpha,\xi))=1\big|\xi=\overline{1,\ell_\alpha},\alpha=\overline{1,\theta}\big)=$$

$$=\sum_{\eta=0}^{S}\sum_{(b,\bar\beta,\bar\rho)\in\mathrm{F}_1(\eta,\theta,\bar\ell)}\sum_{\bar{\bar\pi}\in\Omega_{b,\bar\beta,\bar\rho}(\bar\ell)} K_{\eta,\nu,((\beta_{\sigma_{\rho_1}},\dots,\beta_{\sigma_{\rho_b}}))}\,[((\tau(\rho_1,\pi_{1,1}),\dots,\tau(\rho_1,\pi_{1,\beta_{\rho_1}})),\dots$$

$$\dots,(\tau(\rho_b,\pi_{b,1}),\dots,\tau(\rho_b,\pi_{b,\beta_{\rho_b}})))]\prod_{\alpha=1}^{b}\ \prod_{\xi_{\rho_\alpha}=1}^{\beta_{\rho_\alpha}} x(j,\sigma_{\rho_\alpha},\tau(\rho_\alpha,\pi_{\alpha,\xi_{\rho_\alpha}})),$$

$$GF(2),\nu=1,\dots,k, \tag{4.11}$$

где здесь через $((\beta_{\sigma_{\rho_1}},\dots,\beta_{\sigma_{\rho_b}}))$ обозначен элемент $\bar m\in\Phi(\eta)$, в которой $m_{j,\sigma_{\rho_\xi}}=\beta_{\sigma_{\rho_\xi}}$, $\xi=1,\dots,b$, а остальные компоненты этого элемента суть 0.

Ясно, что в правой части формулы (4.11) слагаемое со степенью S имеет коэффициент $K_{S,\nu,((\ell_1,\dots,\ell_\theta))}[((\tau(1,1),\dots,\tau(1,\ell_1)),\dots,(\tau(\theta,1),\dots,\tau(\theta,\ell_\theta)))]$. Поэтому, учитывая, что

$$x(j,\sigma_\alpha,\tau(\alpha,\xi))=1,\ \xi=\overline{1,\ell_\alpha}\ ,\alpha=\overline{1,\theta},$$

из формулы (4.11) получим:

$$K_{S,\nu,((\ell_1,\dots,\ell_\theta))}[((\tau(1,1),\dots,\tau(1,\ell_1)),\dots,(\tau(\theta,1),\dots,\tau(\theta,\ell_\theta)))]=$$

$$=f_\nu\left(x\left(j,\sigma_\alpha,\tau(\alpha,\xi)\right)=1\middle|\xi=\overline{1,\ell_\alpha},\alpha=\overline{1,\theta}\right)+$$

$$+\sum_{\eta=0}^{S-1}\sum_{(b,\bar\beta,\bar\rho)\in \mathrm{F}_1(\eta,\theta,\bar\ell)}\sum_{\bar{\bar\pi}\in\Omega_{b,\bar{\bar\beta},\bar\rho}(\bar\ell)}K_{\eta,\nu,((\beta_{\sigma_{\rho_1}},\dots,\beta_{\sigma_{\rho_b}}))}[((\tau(\rho_1,\pi_{1,1}),\dots,\tau(\rho_1,\pi_{1,\beta_{\rho_1}})),\dots$$

$$\dots,(\tau(\rho_b,\pi_{b,1}),\dots,\tau(\rho_b,\pi_{b,\beta_{\rho_b}})))],GF(2),\nu=1,\dots,k. \tag{4.12}$$

Таким образом, получаем доказательство следующего утверждения:

Утверждение 3. Пусть $x(j,\sigma_\alpha,\tau(\alpha,\xi))=1$, $\xi=\overline{1,\ell_\alpha}$, $\alpha=\overline{1,\theta}$, где $\theta\le r$, $\ell_\alpha\le n_0+$ $+1$, $j\in\{1,\dots,r\}$, $\tau(\alpha,\xi)\in\{0,\dots,n_0\}$, $\sigma_\alpha\in\{1,\dots,R\}$, а остальные переменные из X принимают значения 0. При этом значение функции $f_\nu(\dots)$ обозначено через $f_\nu\left(x\left(j,\sigma_\alpha,\tau(\alpha,\xi)\right)=1\middle|\xi=\overline{1,\ell_\alpha},\alpha=\overline{1,\theta}\right)$. Пусть имеет место (4.10),(4.11). Тогда справедливо формула (4.13).

Пусть $x(j_\lambda,\sigma_{\lambda,\alpha},\tau(\lambda,\alpha,\xi))=1$, $\xi=\overline{1,\ell_{\lambda,\alpha}}$, $\alpha=\overline{1,\theta_\lambda}$, $\lambda=\overline{1,\mathrm{g}}$, где $\theta_\lambda\le r$, $\ell_{\lambda,\alpha}\le n_0+$ $+1$, $j_\lambda\in\{1,\dots,r\}$, $\mathrm{g}\le k$, $\sigma_{\lambda,\alpha}\in\{1,\dots,R\}$, $\tau(\lambda,\alpha,\xi)\in\{0,\dots,n_0\}$, а остальные переменные из множества X принимают значения 0. При этом значение функции $f_\nu(\dots)$ обозначено через $f_\nu\left(x(j_\lambda,\sigma_{\lambda,\alpha},\tau(\lambda,\alpha,\xi))=1\middle|\xi=\overline{1,\ell_{\lambda,\alpha}},\ \alpha=\overline{1,\theta_\lambda},\lambda=\overline{1,\mathrm{g}}\right)$. Введем обозначения:

$$\theta=(\theta_1,\dots,\theta_{\mathrm{g}}),\ \bar{\bar\ell}=((\ell_{1,1},\dots,\ell_{1,\theta_1}),\dots,(\ell_{\mathrm{g},1},\dots,\ell_{\mathrm{g},\theta_{\mathrm{g}}})),$$

$$S=\ell_{1,1}+\dots+\ell_{1,\theta_1}+\dots+\ell_{\mathrm{g},1}+\dots+\ell_{\mathrm{g},\theta_{\mathrm{g}}}. \tag{4.13}$$

Тогда полином, образованный из элементов множества

$$\{x(j_\lambda,\sigma_{\lambda,\alpha},\tau(\lambda,\alpha,\xi))=1\,|\,\xi=\overline{1,\ell_{\lambda,\alpha}},\alpha=\overline{1,\theta_\lambda},\lambda=\overline{1,\mathrm{g}}\}$$

можно записать в следующем виде:

$$f_\nu\left(x(j_\lambda,\sigma_{\lambda,\alpha},\tau(\lambda,\alpha,\xi))=1\middle|\xi=\overline{1,\ell_{\lambda,\alpha}},\alpha=\overline{1,\theta_\lambda},\lambda=\overline{1,\mathrm{g}}\right)=$$

$$=\sum_{\eta=0}^{S}\sum_{\left(\mu,\bar b,\bar{\bar\beta},\bar{\bar\rho}\right)\in \mathrm{F}_2(\eta,\mathrm{g},\bar\theta,\bar{\bar\ell})}\sum_{\bar{\bar{\bar\pi}}\in\Omega_{\mu,\bar b,\bar{\bar\beta},\bar{\bar\rho}}(\bar{\bar\ell})}K_{\eta,\nu,A}\,[B]\prod_{\upsilon=1}^{\mu}\prod_{\alpha=1}^{b_{\chi_\upsilon}}\prod_{\xi=1}^{\beta_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}}}x(j_{\chi_\upsilon},\sigma_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}},$$

$$,\tau(\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha},\pi_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha},\xi})),GF(2),\nu=1,\dots,k. \tag{4.14}$$

В (4.14) для упрощения формул введены обозначения:

$$A=((\beta_{\chi_1,\sigma_{\rho_{\chi_1,1}}},\dots,\beta_{\chi_1,\sigma_{\rho_{\chi_1,b_{\chi_1}}}}),\dots,(\beta_{\chi_\mu,\sigma_{\rho_{\chi_\mu,1}}},\dots,\beta_{\chi_\mu,\sigma_{\rho_{\chi_\mu,b_{\chi_\mu}}}})), \tag{4.15}$$

$$B=(((\tau(\chi_1,\rho_{\chi_1,1},\pi_{\chi_1,\rho_{\chi_1,1},1}),\dots,(\tau(\chi_1,\rho_{\chi_1,1},\pi_{\chi_1,\rho_{\chi_1,1},\beta_{\chi_1,\rho_{\chi_1,1}}})),\dots$$

$$\dots,(\tau(\chi_1,\rho_{\chi_1,b_{\chi_1}},\pi_{\chi_1,\rho_{\chi_1,b_{\chi_1}},1}),\dots,(\tau(\chi_1,\rho_{\chi_1,b_{\chi_1}},\pi_{\chi_1,\rho_{\chi_1,b_{\chi_1}},\beta_{\chi_1,\rho_{\chi_1,b_{\chi_1}}}})),\dots$$

$$\dots,(\tau(\chi_\mu,\rho_{\chi_\mu,b_{\chi_\mu}},\pi_{\chi_\mu,\rho_{\chi_\mu,b_{\chi_\mu}},1}),\dots,(\tau(\chi_\mu,\rho_{\chi_\mu,b_{\chi_\mu}},\pi_{\chi_\mu,\rho_{\chi_\mu,b_{\chi_\mu}},\beta_{\chi_\mu,\rho_{\chi_\mu,b_{\chi_\mu}}}})), \tag{4.16}$$

где в (4.15) приведен элемент $\bar m\in\Phi(\eta)$, в котором

$$m_{\chi_\upsilon,\sigma_{\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}}}=\beta_{\chi_\upsilon,\sigma_{\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}}},\ \alpha=1,\dots,b_{\chi_\upsilon},\ \upsilon=1,\dots,\mu,$$

а остальные компоненты этого элемента суть 0; $F_2(\eta,\mathrm{g},\bar{\bar\theta},\bar{\bar\ell})$ и $\bar{\bar{\bar\pi}}\in\Omega_{\mu.\bar b,\bar{\bar\beta},\bar{\bar\rho}}(\bar{\bar\ell})$ есть следующие множества:

$$F_2(\eta,\mathrm{g},\bar\theta,\bar{\bar\ell})=\{(\mu,\bar b,\bar{\bar\beta},\ \bar{\bar\rho})|1\le\mu\le\mathrm{g},\ \bar b=(b_{\chi_1},\dots,b_{\chi_\mu}),1\le b_{\chi_\upsilon}\le\theta_{\chi_\upsilon},\ \upsilon=\overline{1,\mu},$$

$$\bar\chi=(\chi_1,\dots,\chi_\mu)\in V_\mu(\mathrm{g}),\ \bar{\bar\beta}=(\bar\beta_{\chi_1},\dots,\bar\beta_{\chi_\mu}),\ \bar\beta_{\chi_\upsilon}=(\beta_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,1}},\dots,\beta_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,b_{\chi_\upsilon}}}),$$

$$1 \le \beta_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}} \le \ell_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}}\ ,\ \alpha = \overline{1, b_{\chi_\upsilon}}\ ,\ \bar{\bar{\rho}}=(\bar{\rho}_{\chi_1}, \dots, \bar{\rho}_{\chi_\mu})\ ,$$
$$\bar{\rho}_{\chi_\upsilon} = (\rho_{\chi_\upsilon,1}, \dots, \rho_{\chi_\upsilon,b_{\chi_\upsilon}}) \in N_{b_{\chi_\upsilon}}(\theta_{\chi_\upsilon}), \upsilon = \overline{1,\mu},$$
$$\beta_{\chi_1,\rho_{\chi_1,1}} + \dots + \beta_{\chi_1,\rho_{\chi_1,b_{\chi_1}}} + \dots + \beta_{\chi_\mu,\rho_{\chi_\mu,1}} + \dots + \beta_{\chi_\mu,\rho_{\chi_\mu,b_{\chi_\mu}}} = \eta\ \}, \tag{4.17}$$

$$\Omega_{\mu,\bar{b},\bar{\bar{\beta}},\bar{\bar{\rho}}}(\bar{\bar{\ell}}) = \prod_{\upsilon=1}^{\mu} \prod_{\alpha=1}^{b_{\chi_\upsilon}} \Omega_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}}(\ell_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}}), \tag{4.18}$$

где

$$V_\mu(\mathrm{g}) = \{\bar{\chi} = (\chi_1, \dots, \chi_\mu) \big| 1 \le \chi_1 < \dots < \chi_\mu \le \mathrm{g}\}, \tag{4.19}$$

$$N_{b_{\chi_\upsilon}}(\theta_{\chi_\upsilon}) = \{\bar{\rho}_{\chi_\upsilon} = (\rho_{\chi_\upsilon,1}, \dots, \rho_{\chi_\upsilon,b_{\chi_\upsilon}}) \Big| 1 \le \rho_{\chi_\upsilon,1} < \dots < \rho_{\chi_\upsilon,b_{\chi_\upsilon}} \le \theta_{\chi_\upsilon}\}, \tag{4.20}$$

$$\Omega_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}}(\ell_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}}) = \{\bar{\pi}_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}} = (\pi_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha},1}, \dots, \pi_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha},\beta_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}}}) | 1 \le \pi_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha},1} < \dots$$
$$\dots < \pi_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha},\beta_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}}} \le \ell_{\chi_\upsilon,\rho_{\chi_\upsilon,\alpha}}\}. \tag{4.21}$$

Ясно, что в правой части формулы (4.14) слагаемое со степенью S имеет коэффициент

$$K_{S,\nu,\left((\ell_{1,1},\dots,\ell_{1,\theta_1}),\dots,(\ell_{\mathrm{g},1},\dots,\ell_{\mathrm{g},\theta_\mathrm{g}})\right)}[((\tau(1,1,1), \dots, \tau(1,1,\ell_{1,1})), \dots, (\tau(1,\theta_1,1), \dots, \tau(1,\theta_1,\ell_{1,\theta_1})), \dots$$
$$\dots, (\tau(\mathrm{g},\theta_\mathrm{g},1), \dots, \tau(\mathrm{g},\theta_\mathrm{g},\ell_{\mathrm{g},\theta_\mathrm{g}})))].$$

Поэтому учитывая, что $x(j_\lambda, \sigma_{\lambda,\alpha}, \tau(\lambda,\alpha,\xi)) = 1,\ \xi = \overline{1,\ell_{\lambda,\alpha}},\ \alpha = \overline{1,\theta_\lambda},\ \lambda = \overline{1,\mathrm{g}}$, из формулы (4.14) получим:

$$K_{S,\nu,\left((\ell_{1,1},\dots,\ell_{1,\theta_1}),\dots,(\ell_{\mathrm{g},1},\dots,\ell_{\mathrm{g},\theta_\mathrm{g}})\right)}[((\tau(1,1,1), \dots, \tau(1,1,\ell_{1,1})), \dots$$
$$\dots, (\tau(1,\theta_1,1), \dots, \tau(1,\theta_1,\ell_{1,\theta_1})), \dots, (\tau(\mathrm{g},\theta_\mathrm{g},1), \dots, \tau(\mathrm{g},\theta_\mathrm{g},\ell_{\mathrm{g},\theta_\mathrm{g}})))] =$$

$$= f_\nu(\ x(j_\lambda, \sigma_{\lambda,\alpha}, \tau(\lambda,\alpha,\xi)) = 1 \big| \xi = \overline{1,\ell_{\lambda,\alpha}}, \alpha = \overline{1,\theta_\lambda}\ , \lambda = \overline{1,\mathrm{g}}) +$$
$$+ \sum_{\eta=0}^{S-1} \sum_{\left(\mu,\bar{b},\bar{\bar{\beta}},\bar{\bar{\rho}}\right) \in \mathrm{F}_2(\eta,\mathrm{g},\bar{\theta},\bar{\bar{\ell}})} \sum_{\bar{\bar{\bar{\pi}}} \in \Omega_{\mu,\bar{b},\bar{\bar{\beta}},\bar{\bar{\rho}}}(\bar{\bar{\ell}})} K_{\eta,\nu,A}\,[B], GF(2), \nu = 1, \dots, k. \tag{4.22}$$

Таким образом, получаем доказательство следующего утверждения:

Утверждение 4. Пусть $x(j_\lambda, \sigma_{\lambda,\alpha}, \tau(\lambda,\alpha,\xi)) = 1, \xi = \overline{1,\ell_{\lambda,\alpha}}, \alpha = \overline{1,\theta_\lambda},\ \lambda = \overline{1,\mathrm{g}}$, где $\theta_\lambda \le r, \ell_{\lambda,\alpha} \le n_0 + 1,\ j_\lambda \in \{1, \dots, r\},\ \ \mathrm{g} \le k,\ \sigma_{\lambda,\alpha} \in \{1, \dots, R\},\ \ \tau(\lambda,\alpha,\xi) \in \{0, \dots, n_0\}$, а остальные переменные из множества X принимают значения 0. При этом значение функции $f_\nu(\dots)$ обозначено через $f_\nu(\ x(j_\lambda, \sigma_{\lambda,\alpha}, \tau(\lambda,\alpha,\xi)) = 1 \big| \xi = \overline{1,\ell_{\lambda,\alpha}},\ \alpha = \overline{1,\theta_\lambda}\ , \lambda = \overline{1,\mathrm{g}})$. Пусть имеют место (4.13)-(4.21). Тогда справедлива формула (4.22).

Формулы (4.3)-(4.7),(4.12),(4.22) основываются на обозначении (4.1). Ясно, что формулу (4.4) можно записать в виде:

$$K_{1,\nu,\left((1_{j,\sigma})\right)}[((\tau))] = K_{0,\nu} + f_\nu(u_j[n-\tau, c+p(\sigma)] = 1), GF(2), \nu = 1, \dots, k. \tag{4.23}$$

Формулу (4.4) можно записать в виде

$$K_{2,\nu,\left((2_{j,\sigma})\right)}[((\tau_1,\tau_2))] = K_{0,\nu} + K_{1,\nu,\left((1_{j,\sigma})\right)}[((\tau_1))] + K_{1,\nu,\left((1_{j,\sigma})\right)}[((\tau_2))] +$$
$$+ f_\nu(u_j[n-\tau_1, c+p(\sigma)], u_j[n-\tau_2, c+p(\sigma)] = 1), GF(2), \nu = 1, \dots, k. \tag{4.24}$$

Формулу (4.5) можно записать в виде

$$K_{2,\nu,\left((1_{j,\sigma_1},1_{j,\sigma_2})\right)}[((\tau_1),(\tau_2))] = K_{0,\nu} + K_{1,\nu,\left((1_{j,\sigma_1})\right)}[((\tau_1))] + K_{1,\nu,\left((1_{j,\sigma_2})\right)}[((\tau_2))] +$$
$$+ f_\nu(u_j[n-\tau_1, c+p(\sigma_1)], u_j[n-\tau_2, c+p(\sigma_2)] = 1),\ \ GF(2), \nu = 1, \dots, k. \tag{4.25}$$

Формулу (4.6) можно записать в виде

$$K_{2,\nu,((1_{j_1,\sigma_{j_1}}),(1_{j_2,\sigma_{j_2}}))}[((\tau_1),(\tau_2))] = K_{0,\nu} + K_{1,\nu,((1_{j_1,\sigma_{j_1}}))}[((\tau_1))] + K_{1,\nu,((1_{j_2,\sigma_{j_2}}))}[((\tau_2))] + $$
$$+ f(u_{j_1}[n-\tau_1, c+p(\sigma_{j_1})], u_{j_2}[n-\tau_2, c+p(\sigma_{j_2})]) = 1), GF(2), \nu = 1,\ldots,k. \quad (4.26)$$

Формулу (4.7) можно записать в виде

$$K_{\ell,\nu,((\ell_{j,\sigma}))}[((\tau_1,\ldots,\tau_\ell))] = f_\nu(u_j[n-\tau_\xi, c+p(\sigma)] = 1 \mid \xi = \overline{1,\ell}) +$$
$$+\sum_{\beta=0}^{\ell-1} \sum_{(\pi_1,\ldots,\pi_\beta)\in\Omega_\beta(\ell)} K_{\beta,\nu,((\beta_{j,\sigma}))}[((\tau_{\pi_1},\ldots,\tau_{\pi_\beta}))],\ \nu = 1,\ldots,k, GF(2). \quad (4.27)$$

Формулу (4.8) можно записать в виде

$$K_{\theta,\nu,((1_{j,\sigma_1},\ldots,1_{j,\sigma_\theta}))}[((\tau_1),\ldots,(\tau_\theta))] = f_\nu(\, u_j[n-\tau_\alpha, c+p(\sigma_\alpha)] = 1 \mid \alpha = \overline{1,\theta}\,) +$$
$$+\sum_{\eta=0}^{\theta-1} \sum_{(\rho_1,\ldots\rho_1)\in N_\beta(\theta)} K_{\eta,\nu,((1_{j,\sigma_{\rho_1}},\ldots,1_{j,\sigma_{\rho_\eta}}))}[((\tau_{\rho_1}),\ldots,(\tau_{\rho_\eta}))], GF(2). \quad (4.28)$$

Формулу (4.12) можно записать в виде

$$K_{S,\nu,((\ell_1,\ldots,\ell_\theta))}[((\tau(1,1),\ldots,\tau(1,\ell_1)),\ldots,(\tau(\theta,1),\ldots,\tau(\theta,\ell_\theta)))] =$$
$$= f_\nu(u_j[n-\tau(\alpha,\xi), c+p(\sigma_\alpha)] = 1 \mid \xi = \overline{1,\ell_\alpha}, \alpha = \overline{1,\theta}) +$$
$$+\sum_{\eta=0}^{S-1} \sum_{(b,\bar\beta,\bar\rho)\in \mathrm{F}_1(\eta,\theta,\bar\ell)} \sum_{\bar{\bar\pi}\in\Omega_{b,\bar\beta,\bar\rho}(\bar\ell)} K_{\eta,\nu,((\beta_{\sigma_{\rho_1}},\ldots,\beta_{\sigma_{\rho_b}}))}[((\tau(\rho_1,\pi_{1,1}),\ldots,\tau(\rho_1,\pi_{1,\beta_{\rho_1}})),\ldots$$
$$\ldots,(\tau(\rho_b,\pi_{b,1}),\ldots,\tau(\rho_b,\pi_{b,\beta_{\rho_b}})))], GF(2), \nu = 1,\ldots,k. \quad (4.29)$$

Формулу (4.22) можно записать в виде

$$K_{S,\nu,\left((\ell_{1,1},\ldots,\ell_{1,\theta_1}),\ldots,(\ell_{\mathrm{g},1},\ldots,\ell_{\mathrm{g},\theta_\mathrm{g}})\right)}[((\tau(1,1,1),\ldots,\tau(1,1,\ell_{1,1})),\ldots$$
$$\ldots,(\tau(1,\theta_1,1),\ldots,\tau(1,\theta_1,\ell_{1,\theta_1})),\ldots,(\tau(\mathrm{g},\theta_\mathrm{g},1),\ldots,\tau(\mathrm{g},\theta_\mathrm{g},\ell_{\mathrm{g},\theta_\mathrm{g}})))] =$$

$$= f_\nu(\, u_{j_\lambda}[n-\tau(\lambda,\alpha,\xi), c+p(\sigma_{\lambda,\alpha})] = 1 \mid \xi = \overline{1,\ell_{\lambda,\alpha}}, \alpha = \overline{1,\theta_\lambda}, \lambda = \overline{1,\mathrm{g}}) +$$
$$+\sum_{\eta=0}^{S-1} \sum_{(\mu,\bar b,\bar{\bar\beta},\bar{\bar\rho})\in\mathrm{F}_2(\eta,\mathrm{g},\bar\theta,\bar{\bar\ell})} \sum_{\bar{\bar{\bar\pi}}\in\Omega_{\mu,\bar b,\bar{\bar\beta},\bar{\bar\rho}}(\bar{\bar\ell})} K_{\eta,\nu,A}[B], GF(2), \nu = 1,\ldots,k. \quad (4.30)$$

Для установления общей формулы определения любых коэффициентов в полиноме (3.6) рассмотрим коэффициент $K_{i,\nu,\bar m}[\bar{\bar\tau}]$, где $\bar{\bar\tau}\in\Gamma(i,\bar m)$, $\bar m\in\Phi(i)$, $\nu\in\{1,\ldots,k\}$ и $i\in\{0,\ldots,(n_0+1)rR\}$. При $i=0,1,2$ формулы для определения $K_{i,\nu,\bar m}[\bar{\bar\tau}]$ приведены в формулах (4.2), (4.3)-(4.6).

Пусть: 1^0 $\bar m\in\Phi(i)$, где $i\in\{3,\ldots,(n_0+1)rR\}$; 2^0. Ненулевые элементы набора $\bar m$ есть m_{j,σ_j}, где $\sigma_j\in Q_1(i,\bar m,j)$, $j\in Q(i,\bar m)$; 3^0. $Q(i,\bar m)=\{j_1,\ldots,j_\mathrm{g}\}$, $Q_1(i,\bar m,j_\lambda)=\{\sigma_{\lambda,1},\ldots,\sigma_{\lambda,\theta_\lambda}\}$, где $j_\lambda=\overline{1,r}$, $\sigma_{\lambda,\alpha}=\overline{1,R}$, $\alpha=\overline{1,\theta_\lambda}$, $\lambda=\overline{1,\mathrm{g}}$; 4^0. Множества $\Gamma_1(m_{j_\lambda,\sigma_{\lambda,\alpha}})$, $\alpha=\overline{1,\theta_\lambda}$, $\lambda=\overline{1,\mathrm{g}}$, есть следующие множества

$$\Gamma_1(m_{j_\lambda,\sigma_{\lambda,\alpha}}) = \{\bar\tau(j_\lambda,\sigma_{\lambda,\alpha}) = (\tau(j_\lambda,\sigma_{\lambda,\alpha},1),\ldots,\tau(j_\lambda,\sigma_{\lambda,\alpha},m_{j_\lambda,\sigma_{\lambda,\alpha}})) \mid 0\le$$
$$\le \tau(j_\lambda,\sigma_{\lambda,\alpha},1) < \cdots < \tau(j_\lambda,\sigma_{\lambda,\alpha},m_{j_\lambda,\sigma_{\lambda,\alpha}}) \le n_0\};$$

5^0. $\ell_{\lambda,\alpha}=m_{j_\lambda,\sigma_{\lambda,\alpha}}$, $\alpha=\overline{1,\theta_\lambda}$, $\lambda=\overline{1,\mathrm{g}}$; 6^0. В случае, когда $u_{j_\lambda}[n-\tau(\lambda,\alpha,\xi),c+p(\sigma_{\lambda,\alpha})]=1$, $\xi=\overline{1,\ell_{\lambda,\alpha}}$, $\alpha=\overline{1,\theta_\lambda}$, $\lambda=\overline{1,\mathrm{g}}$, где $\theta_\lambda\le r$, $\ell_{\lambda,\alpha}\le n_0+1$, $\mathrm{g}\le k$, $j_\lambda\in\{1,\ldots,r\}$, $\sigma_{\lambda,\alpha}\in\{1,\ldots,R\}$, $\tau(\lambda,\alpha,\xi)\in\{0,\ldots,n_0\}$, а остальные переменные из множества U принимают значения 0, тогда для каждого $\nu\in\{1,\ldots,k\}$ значение функции $f_\nu(\ldots)$ обозначено через

$$f_\nu(\, u_{j_\lambda}[n-\tau(\lambda,\alpha,\xi), c+p(\sigma_{\lambda,\alpha})] = 1 \,\big|\, \xi=\overline{1,\ell_{\lambda,\alpha}},\ \ \alpha=\overline{1,\theta_\lambda}\,,\ \ \lambda=\overline{1,\mathrm{g}}).$$

Ясно, что при выполнения условия, 6^0 множества $\Gamma(i,\bar{m})$ содержит следующий единственный элемент

$$\bar{\bar{\tau}} = ((\tau(1,1,1),\dots,\tau(1,1,\ell_{1,1})),\dots$$
$$\dots,(\tau(1,\theta_1,1),\dots,\tau(1,\theta_1,\ell_{1,\theta_1})),\dots,(\tau(\mathrm{g},\theta_\mathrm{g},1),\dots,\tau(\mathrm{g},\theta_\mathrm{g},\ell_{\mathrm{g},\theta_\mathrm{g}}))).$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия $1^0 - 6^0$ и имеют место соотношения (4.15)-(4.21). Тогда для коэффициента $K_{i,\nu,\bar{m}}[\bar{\bar{\tau}}]$ полинома (3.7) справедлива следующая формула:

$$K_{i,\nu,\bar{m}}[\bar{\bar{\tau}}] = f_\nu\big(\, u_{j_\lambda}\big[n-\tau(\lambda,\alpha,\xi), c+p\big(\sigma_{\lambda,\alpha}\big)\big] = 1 \,\big|\, \xi=\overline{1,\ell_{\lambda,\alpha}},\ \ \alpha=\overline{1,\theta_\lambda}\,,\ \ \lambda=\overline{1,\mathrm{g}}\big) +$$
$$+\sum_{\eta=0}^{i-1}\ \sum_{\left(\mu,\bar{b},\bar{\bar{\beta}},\bar{\rho}\right)\in\mathrm{F}_2(\eta,\mathrm{g},\bar{\theta},\bar{\bar{\ell}})}\ \sum_{\bar{\bar{\bar{\pi}}}\in\Omega_{\mu,\bar{b},\bar{\bar{\beta}},\bar{\rho}}(\bar{\bar{\ell}})} K_{\eta,\nu,A}\,[B], GF(2), \nu=1,\dots,k. \qquad (4.31)$$

Ясно, что формула (4.31) вместе с формулами (4.2), (4.23)-(4.30) определяют рекуррентное соотношение для нахождения коэффициентов полинома (3.7) при известных значениях входных и выходных последовательностей.

5. Заключение. Двухзначный аналог полинома Вольтерры в виде (3.7) является общим функциональным соотношением для МНМДС с фиксированной памятью n_0 и ограниченной связью P, и может быть использован при исследовании ее различных свойств, при постановке и решении для них различных математических и прикладных задач и т.д. Полученное рекуррентное соотношение для определения коэффициентов полиномиальных представлений может быть использовано при разработке алгоритмов и программ для вычисления значений этих коэффициентов.

Литература

1. Фараджев Р.Г. Линейные последовательностные машины. М.: Сов. радио,1975, 248 с.
2. Фараджев Р.Г., Фейзиев Ф.Г. Методы и алгоритмы решения задачи квадратичной оптимизации для двоичных последовательностных машин. Баку: Изд-во Элм, 1996, 180 с.
3. Фейзиев Ф.Г., Фараджева М.Р. Модулярные последовательностные машины: Основные результаты по теории и приложению. Баку: Изд-во Элм, 2006, 234 с.
4. Блюмин С.Л., Фараджев Р.Г. Линейные клеточные машины: Подход пространства состояний (обзор)// Автоматика и телемеханика.1982, №2. С. 125—163.
5. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки. М.: Мир,1986, 576 с.
6. Латыпов Р.Х., Нуруддинов Ш.Р., Столов Е.Л., Фараджев Р.Г. Применение теории линейных последовательностных машин в системах диагностирования// Автоматика и телемеханика. 1988, №8, С. 3-27.
7. Иванов М.А. Криптографические методы защиты информации в компьютерных системах и сетях. М.: Кудиц-образ, 2001, 368 с.
8. Evgenie D. Adamovic, Pavel L.Aleksandrov, Oleg V.Gradov, Leonid M.Mamalyga, Maksim L. Mamalyga. Correction of the recording of the artifacts and detection of the functional deviations in ECG by means of syndrome decoding with an automatic burst error correction of the cyclic codes using periodograms for determination of the code component spectral range. Part 1: Basic principles of the novel approach// Open access e-journal Cardiometry, No. 6, may 2015, pp. 65-76.
9. Фейзиев Ф.Г., Мегрдад Бабаванд. Описание декодирования циклических кодов в классе последовательностных машин, основанного на теореме Меггитта// Автоматика и вычислительная техника, 2012, №4, С. 26-33.
10. Блюмин С.Л., Корнеев А.М. Дискретное моделирование систем автоматизации и управления: Монография. Липецк: Липецкий эколого-гуманитарный институт, 2005, 124 с.
11. Ф.Г.Фейзиев, З.А.Самедова. Полиномиальное соотношение для представления полной реакции 3D-нелинейных модулярных динамических систем// г. Киев, Электронное моделирование. 2011, Т. 33, №2, с. 33-50.

UOT 519.95

F.G. Feyziyev, M.R. Mehdiyeva

İkiparametrli ikilik çoxölçülü modulyar dinamik sistemlərin tam reaksiyasının polionmial göstərilişi üçün Volterra polinomlarının iki qiymətli analoqu və onun əmsallarının tapılması

2D-ikilik çoxölçülü modulyar dinamik sistemlərin tam reaksiyasının Volterra polinomlarının iki qiymətli analoqu şəklində göstərilişi məsələsinə baxılır. Baxılan sistemin giriş və çıxış ardıcıllıqları məlum olduqda bu polinomun naməlum əmsallarını tapmaq üçün rekurrent düstur təklif olunur.

Açar sözlər: *2D*-ikilik çoxölçülü modulyar dinamik sistemlər, Volterra polinomları, naməlum əmsallar, rekurrent düstur

F.G. Feyziyev, M.R. Mekhtiyeva

A two-valued analog of Volterra's polynomial for description of full reaction of two-parameter binary multivariate nonlinear modular dynamical systems and finding its coefficients

The problem of two-valued analogs of Volterra's polynomial for description of full reaction of some classes of 2D-binary multivariate modular dynamical systems is considered. The recurrence formulas for calculating the coefficients of this polynomial with known input and output sequences of the multivariate modular dynamic system under investigation are provided.

Keywords: 2D-binary multivariate modular dynamical systems, Volterra's polynomial, unknown coefficients, recurrence formulas

Сумгаитский Государственный Университет
Бакинский Государственный Университет

Представлено 25.01.2018