Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXVIII, No.3, 2018
www.icp.az/2018/3-03.pdf

УДК 519.622.2

В.М. АБДУЛЛАЕВ

ПОДХОД К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТНО-ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Исследуется численное решение для класса коэффициентно-обратных задач относительно параболических уравнений. Предложен подход к их решению, основанный на использовании метода прямых для сведения задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с неизвестными параметрами. Далее используется специальное представление решения полученной краевой задачи относительно линейной системы дифференциальных уравнений с краевыми условиями, в результате задача параметрической идентификации сводится к решению вспомогательных краевых задач и одной системы алгебраических уравнений. Приводятся результаты численных экспериментов и их анализ.

Ключевые слова: обратная задача, метод прямых, параболическое уравнение, параметрическая идентификация

1. Введение. В данной работе предлагается подход к численному решению задач параметрической идентификации относительно дифференциальных уравнений с частными производными. Для идентификации постоянных во времени или по пространственной переменной имеются результаты дополнительных экспериментов, в процессе которых проводились замеры состояния объекта.

Отметим, что с подобными обратными задачами приходится сталкиваться на этапе параметрической идентификации математических моделей практически для всех динамических процессов, для которых предполагается строить системы автоматического или автоматизированного управления. В связи с этим различным аспектам исследования коэффициентно-обратных задач посвящено большое число публикаций [1-8].

Одним из наиболее распространенных подходов к решению обратных задач является приведение их к вариационных постановкам с дальнейшем применением методов оптимизации и оптимального управления [4, 5]. Применение этого подхода, во-первых, связано с проблемами получения формул для градиента функционала вариационной задачи, а во-вторых, с необходимостью использования итерационных методов минимизации функционала. Ранеее в работах [4, 5] для решения этих задач был использован аппарат теории оптимального управления и соответствующие численные итерационные методы оптимизации первого порядка.

Важно отметить, что, в отличие от оптимизационных подходов, в данной работе не используется построение каких-либо итерационных процедур или минимизирующих последовательностей. В данной работе предлагается численный метод решения задачи, основанный на использовании метода прямых для сведения задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с неизвестными параметрами [8, 9]. Далее используется специальное представление решения полученной краевой задачи относительно линейной системы дифференциальных уравнений с краевыми условиями, с помощью которого задача параметрической идентификации сводится к решению вспомогательных краевых задач и одной системы алгебраических уравнений.

Были проведены многочисленные численные эксперименты на специально построенных тестовых задачах с применением предложенных в данной работе формул и схем численного решения.

2. Постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу восстановления коэффициентов для параболического уравнения:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \xi(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \xi_1(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \xi_2(x,t)u(x,t) +$$
$$+F(x,t;\ C) + f(x,t),\ \ (x,t) \in \Omega = \{(x,t): 0 < x < a,\ \ 0 < t \le T\}. \quad (2.1)$$

Здесь функция $F(x,t;C)$ имеет один из видов:

$$F(x,t;\ C) = \sum_{i=1}^{l} B_i(x,t)C_i(t), \quad (2.2)$$

$$F(x,t;\ C) = \sum_{i=1}^{l} B_i(x,t)C_i(x), \quad (2.3)$$

где $\xi(x,t) > 0$, $\xi_1(x,t)$, $\xi_2(x,t)$, $f(x,t) \in C^{2,1}(\Omega)$ – заданные непрерывные функции, $B_i(x,t)$, $i = 1,2 \ldots l$ – заданные непрерывные линейно-независимые функции. Выполнены также условия ограниченности в Ω значений функций:

$$0 < \xi(x,t) \le c_1; |\xi_1(x,t)|,\ 0 < \xi_2(x,t) \le c_3,\ \left|{\partial \xi_2(x,t)}/{\partial x}\right| \le c_4.$$

где c_i, $i = 1,2,3,4$ – ограниченные положительные константы.

С целью идентификации $C(t)$ или $C(x)$ имеются результаты N экспериментов, проведенных при различных начальных и краевых условиях:

$$u^j(x,0) = \varphi^j(x), \qquad 0 \le x \le a, \quad (2.4)$$

$$u^j(0,t) = \psi_1^j(t), \qquad u^j(a,t) = \psi_2^j(t), \qquad 0 \le t \le T, \quad (2.5)$$

здесь функция $\varphi^j(x), \psi_0^j(t), \psi_1^j(t) -$ непрерывны по своим аргументам, $j = 1,2,\ldots,N$.

При каждом эксперименте проводились наблюдения за состоянием процесса. Обозначим через $u^j(x,t)$ состояние процесса в точке x в момент времени t при j-том эксперименте, $j = 1,2,\ldots,N$.

Дополнительные условия, необходимые для определения вектор-функции $C(t)$, полученные по результатам наблюдений за процессом при каждом j-том эксперименте, могут иметь различный вид, что связано с характером проводимых экспериментов и результатов наблюдения [2-3]. В частности, пусть в точках $x_i \in (0;a)$, $i = 1,2,\ldots L$, ведутся наблюдения:

$$u^j(x_i,t) = \Phi_i^j(t),\ \ i = 1,2,\ldots,L, \qquad 0 \le t \le T, \quad (2.6)$$

где $\Phi_i^j(t),\ i = 1,\ldots,l$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции.

А для определения вектор-функции $C(x) = (C_1(x), C_2(x),\ldots,C_l(x))^*$ дополнительные условия являются результатом наблюдения за состоянием заданных моментов времени, $t_j \in (0,T]$, $i = 1,\ldots,L$:

$$u^j(x,t_i) = \Phi_i^j(x),\ \ i = 1,\ldots,L, \qquad 0 \le x \le a. \quad (2.7.)$$

Здесь $\Phi_i^j(x)$, $i = 1,2,\ldots,l$ – заданные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Предполагается, что функции $\varphi_0^j(x)$, $\varphi_1^j(x)$ $\psi_1^j(t), \psi_2^j(t)$ удовлетворяют условиям согласования:

$$\varphi_0^j(0) = \psi_1^j(0), \quad \varphi_0^j(a) = \psi_2^j(0), \; \varphi_0^j(0) = \Phi_i^j(0).$$

Задача состоит в нахождении непрерывной вектор-функции $C(t)$, удовлетворяющей условиям (2.1), (2.2), (2.4)-(2.6) (задача А) или вектор-функции $C(x)$ в случае условий (2.1), (2.3), (2.4)-(2.5), (2.7) (задача В).

Рассматриваемые задачи идентификации исследовались многими авторами [3–7]. Были получены необходимые условия существования и единственности решения [6]. Предложенные в работе [4, 5] методы решения этой задачи использовали сведение ее к задаче оптимального управления, для решения которой применялись итерационные методы. В работе [7] использовалось сведение задачи к интегральному уравнению, решение которого представляет вычислительную сложность. Ниже предлагается использовать приведение задачи (2.1)-(2.5) к задаче параметрической идентификации относительно системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

3. Метод решения. Предлагаемый численный метод решения задач А и В основан на использовании метода прямых для сведения задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с неизвестными параметрами [8-9].

Решение задачи А. С целью приведения задачи А к обыкновенной системе дифференциальных уравнений используем метод прямых. В области Ω проведем прямые $t = t_k = k\tau$, $k = 0,1,\ldots,M$, $\tau = T/M$.

Производную $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\big|_{t=t_k}$ в (2.1) аппроксимируем разностным отношением

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=t_k} = \frac{u(x,t_k) - u(x,t_{k-1})}{\tau} + O(\tau), \qquad k = 1,2,\ldots,M,$$

и далее используем обозначения:

$$U^{(k)}(x) = u(x,t_k), C^{(k)} = C(t_k), \psi_1^{(k)} = \psi_1(t_k), \psi_2^{(k)} = \psi_2(t_k),$$

$$\tilde{B}^{(k)}(x) = -\frac{B(x,t_k)}{\xi(x,t_k)}, \tilde{\xi}_1^{(k)}(x) = -\frac{\xi_1(x,t_k)}{\xi(x,t_k)},$$

$$\tilde{\xi}_2^{(k)}(x) = -\left(\frac{\xi_2(x,t_k)}{\xi(x,t_k)} - \frac{1}{\tau\cdot\xi(x,t_k)}\right), \;\; \tilde{f}^{(k)}(x) = -\left(\frac{f(x,t_k)}{\xi(x,t_k)} + \frac{U^{(k-1)}(x)}{\tau\cdot\xi(x,t_k)}\right).$$

В результате получим уравнения второго порядка с обыкновенными производными:

$$\frac{d^2U^{(k)}(x)}{dx^2} = \tilde{\xi}_1^{(k)}(x)\frac{dU^{(k)}(x)}{dx} + \tilde{\xi}_2^{(k)}(x)\, U^{(k)}(x) + \sum_{i=1}^{l}\tilde{B}_i^{(k)}(x)C_i^{(k)} +$$

$$+\tilde{f}^{(k)}(x), \quad k = 1,2,\ldots M\,, \qquad U^{(0)}(x) = \varphi(x). \tag{3.1}$$

Из (1.5) имеем следующие условия:

$$U^{(k)}(0) = \psi_1^{(k)}, \qquad U^{(k)}(a) = \psi_2^{(k)}, \quad k = 1,2,\ldots M, \tag{3.2}$$

а дополнительные условия имеют вид

$$U^{(k)j}(x_i) = \Phi_i^{(k)j}, \quad i = 1,2,\ldots,l, \tag{3.3}$$

Уравнения (3.1) при каждом k, $k = 1,2,\ldots,M$, приведем к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dU_1^{(k)}(x)}{dx}=U_2^{(k)}(x),$$
$$\frac{dU_2^{(k)}(x)}{dx}=\tilde{\xi}_2^{(k)}(x)\,U_1^{(k)}(x)+\tilde{\xi}_1^{(k)}(x)U_2^{(k)}(x)+\sum_{i=1}^{l}\tilde{B}_i^{(k)}(x)C^{(k)}+\tilde{f}^{(k)}(x),\ \ k=1,2,\dots M, \tag{3.4}$$

$$U_1^{(k)}(0)=\psi_1^{(k)},\qquad U_1^{(k)}(a)=\psi_2^{(k)},\qquad k=1,2,\dots M. \tag{3.5}$$

Задачи (3.4), (3.5), (3.3) при каждом $k,\ k=1,2,\dots,M$, запишем в следующем виде:

$$\frac{dU(x)}{dx}=A(x)U(x)+B(x)C+F(x), x\in(0,a\,], \tag{3.6}$$

с краевыми условиями

$$\tilde{\alpha}U(0)=\psi_1,\qquad \tilde{\beta}U(a)=\psi_2, \tag{3.7}$$

а дополнительные условия имеют вид

$$\tilde{\gamma}U(x_i)=\Phi_i,\quad i=1,2,\dots,L. \tag{3.8}$$

Здесь $U(x)\in R^2-$ фазовое состояние системы; $C=(C_1,C_2,\dots,C_l)^*\in R^l-$ искомые параметры; $A(x),\ B(x),F(x)$ – заданные непрерывные матричные функции по $x,\ x\in(0,a\,]$ соответственно размерности (2×2), $(2\times l)$, (2×1); $\tilde{\alpha},\ \tilde{\beta},\tilde{\gamma}-$ заданные матрицы размерности (1×2); $*$ – знак транспонирования.

Решение задачи (3.6), (3.7) $-U^j(x)$ для каждого j-того эксперимента будем искать в виде:

$$U^j(x)=U^{0j}(x)+\sum_{i=1}^{l}U^{ij}(x)\,C_i,\qquad x\in\left(0,a^j\right],j=1,2,\dots,N, \tag{3.9}$$

где пока произвольные вектор-функция $U^{0j}(x)$ и $U^{ij}(t)$, должны удовлетворять условиям

$$\tilde{\alpha}U^{0j}(0)=\psi_1,\qquad \tilde{\beta}U^{0j}(a)=\psi_2,\ \ \tilde{\alpha}U^{ij}(0)=0,\qquad \tilde{\beta}U^{ij}(a)=0, \tag{3.10}$$

Несложно проверить, что в этом случае $U^j(x)$ из (3.9) удовлетворяет условиям (3.7) для всех $j=1,2,\dots,N$ и произвольных $C_i,\ i=1,2.\dots,l$.

Теорема 1. *Если функции $U^{i\,j}(x),\ i=0,1,\dots,l$ являются при $x\in\left(0,a^j\right]$ решениями следующих задач:*

$$\frac{dU^{0j}(x)}{dx}=A(x)U^{0j}(x)+F(x),\quad \tilde{\alpha}U^{0j}(0)=\psi_1,\qquad \tilde{\beta}U^{0j}(a)=\psi_2, \tag{3.11}$$

$$\frac{dU^{ij}(x)}{dx}=A(x)U^{ij}(x)+\ B^i(x),\qquad \tilde{\alpha}U^{ij}(0)=0,\quad \tilde{\beta}U^{ij}(a)=0, \tag{3.12}$$

тогда функция $U^j(x)$, определенная формулой (3.9), удовлетворяет условиям (3.6), (3.7) для произвольных значений вектора $C,\ j=1,2,\dots,N$.

Доказательство. Действительно, продифференцировав (3.9) и подставив в (3.6), после несложных преобразований получим:

$$\left[\frac{dU^{0j}(x)}{dx}=-A(x)U^{0j}(x)-F(x)\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\left[\frac{dU^{ij}(x)}{dx}-A(x)U^{ij}(x)-B^{i}(x)\right]C_i=0,\ \ x\in\left(0,a^{j}\right],\ \ j=1,2,\dots,N.$$

Учитывая произвольность функций $U^{0j}(x)$ и $U^{ij}(x)$, $i=1,2.\dots,l$, требуя от них равенства нулю выражений, стоящих в квадратных скобках, получим, что эти функции должны быть решениями задач (3.11), (3.12).

Для всех видов измерения будем предполагать, что проводимые эксперименты независимы, причем выполнено условие $L\geq l$. Дополнительные условия (3.8) называют условиями переопределения [2-3].

Используя значения полученных решений задач (3.11), (3.12) в точках, которые участвуют в проводимых измерениях вида (3.8), получим систему L линейных алгебраических уравнений относительно вектора $C\in R^{l}$, которую в общем случае запишем так

$$QC=G. \tag{3.13}$$

Здесь матрица $Q=((q_{ij}))$, $i=1,2,\dots,L$, $j=1,2,\dots,l$, вектор $G=(g_1,g_2,\dots,g_L)^{*}$ определяются видом и результатами проводимых наблюдений. В случае, если $L=l$, то решение определяется непосредственно из (3.13): $C=Q^{-1}G$. В случае, если $L>l$ под решением (3.13) будем понимать вектор:

$$C=(Q^{*}\mathrm{Q})^{-1}Q^{*}G\ , \tag{3.14}$$

называемый нормальным решением переопределенной системы [3].

Решение задачи B. В области Ω проведем прямые $x=x_k=kh$, $k=0,1,\dots,M$, $h=a/M$.

Введем обозначения

$$U^{(k)}(t)=u(x_k,t),\qquad B^{(k)}(t)=B(x_k,t),$$

$$\varphi_k=\varphi(x_k),\ \ C^{(k)}=C(x_k),\xi^{(k)}(t)=\xi(x_k,t),$$

$$\xi_1^{(k)}(t)=\xi_1(x_k,t),\quad \xi_2^{(k)}(t)=\xi_2(x_k,t),\ \ f^{(k)}(t)=f(x_k,t),k=1,2,\dots,M-1.$$

Аппроксимируя в (2.1) производные $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x=x_k}$ и $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=x_k}$ разностными соотношениями

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=x_k}=\frac{U^{(k+1)}(t)-U^{(k-1)}(t)}{2h}+O(h^2),\quad k=1,2,,\dots,M-1,$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x=x_k}=\frac{U^{(k+1)}(t)-2U^{(k)}(t)+U^{(k-1)}(t)}{h^2}+O(h^2),\quad k=1,2,\dots,M-1,$$

получим систему дифференциальных уравнений с обыкновенными производными $(M-1)$-ого порядка:

$$\frac{dU^{(k)}(t)}{dt}=\frac{\xi^{(k)}(t)}{h^2}\left(U^{(k+1)}(t)-2U^{(k)}(t)+U^{(k-1)}(t)\right)+\frac{\xi_1^{(k)}(t)}{2h}\left(U^{(k+1)}(t)-U^{(k-1)}(t)\right)+$$

$$+\xi_2^{(k)}(t)U^{(k)}(t)+\sum_{i=1}^{l}B_i^{(k)}(t)C_i^{(k)}+f^{(k)}(t),\quad k=1,2,\dots,M-1,$$

$$U^{(0)}(t)=\psi_1(t),\ \ U^{(M)}(t)=\psi_2(t),\ \ t\in(0;T], \tag{3.15}$$

с условиями

$$U^{(k)}(0)=\varphi^{(k)},\ \ k=1,2,\dots,M-1. \tag{3.16}$$

После некоторых обозначений получим задачу:

$$\frac{dU^{(k)}(t)}{dt}=\tilde{A}(t)U^{(k)}(t)+B^{(k)}(t)C+F(t),\quad k=1,2,\dots,M-1, \tag{3.17}$$

$$U^{(k)}(0)=\varphi^{(k)}. \tag{3.18}$$

Дополнительные условия (2.7) примут вид

$$U^{(k)j}(t_i)=\Phi_i^{(k)j},\quad i=1,2,\dots,l. \tag{3.19}$$

4. Результаты численных экспериментов. Были проведены многочисленные численные эксперименты на тестовых задачах с применением предложенных в данной работе формул и схем численного решения. Результаты экспериментов показали достаточную практическую эффективность описанного подхода.

Задача 1. Рассмотрим следующую задачу параметрической идентификации для параболического уравнения (4.1):

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+(2x+t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-2u(x,t)+$$
$$+(x+t)C_1(t)+(2x+3t)C_2(t)+\pi e^{-2t}\big(\pi sin(\pi x)-(x+2t)cos(\pi x)\big)+$$
$$+(x+t)(1.5e^{-2t}+0.5)-\ 0.25(2\text{x}+3)e^{3t},$$
$$(x,t)\in\Omega=\{(x,t):0<x<1,\quad 0<t\le 1\}. \tag{4.1}$$

Здесь $u(x,t)-$ состояние процесса, $C(t)\in R^2-$ идентифицируемый вектор параметров, причем функция $u(x,t)=(e^{-2t}\sin(\pi x))$ и вектор-функция $C(t)=(\frac{3}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}e^{3t}\ )^*$, как несложно проверить, удовлетворяют уравнениям (4.1).

Для идентификации вектора $C(t)$ проведен один эксперимент $(N=1)$ при начально-краевых условиях:

$$u(x,0)=\sin(\pi x),\quad 0\le x\le 1,$$
$$u(0,t)=0,\qquad u(1,t)=0,\qquad 0\le t\le 1, \tag{4.2}$$

при котором проводились наблюдения в двух точках $x=0.25$ и $x=0.5$ (т.е. $L=l=2$) и в результате были получены дополнительные разделенные многоточечные условия вида (2.6):

$$u(0.25,t)=\frac{\sqrt{2}\,e^{-2t}}{2},\quad u(0.5,t)=e^{-2t},\quad 0\le t\le 1. \tag{4.3}$$

Для сведения задачи (4.1), (4.2) к задаче (3.6)-(3.7) методом прямых при проведении численных экспериментов использовались различные значения шага τ (т.е. число прямых). Решения для $\tau\in[0.02;0.04]$ практически не различались и были достаточно близки к точному решению. В таблице 1 приведены результаты, полученные при $\tau=0.04$, т.е. $M=25$. Для решения вспомогательных задач Коши использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка, результаты приведены при величине шага $h=0.005$.

В табл.1 приведены точные и полученные значения параметров $C(t)$ при $\chi = 0;\ 0.01;\ 0.03$, что соответствует замерам соответственно без наличия помех, при помехах –1% и 3% от измеряемой величины в условиях (4.3).

Таблица 1
Точные и полученные решения задачи 1 при разных уровнях помех

	Точные		$\chi = 0$		$\chi = 0.01$		$\chi = 0.03$	
t	$C_1(t)$	$C_2(t)$	$C_1(t)$	$C_2(t)$	$C_1(t)$	$C_2(t)$	$C_1(t)$	$C_2(t)$
0.02	1.9412	0.5309	1.9318	0.5308	1.9473	0.5289	1.9131	0.5331
0.10	1.7281	0.6749	1.7203	0.6749	1.9166	0.6497	2.6546	0.5953
0.20	1.5055	0.9110	1.4994	0.9110	1.6183	0.8920	1.7719	0.8612
0.30	1.3232	1.2298	1.3185	1.2297	1.2451	1.2328	1.1944	1.2329
0.40	1.1740	1.6600	1.1702	1.6600	1.0840	1.6718	1.4485	1.6277
0.50	1.0518	2.2408	1.0489	2.2408	1.0147	2.2489	0.8406	2.2613
0.60	0.9518	3.0248	0.9495	3.0248	1.0067	3.0187	0.9551	3.0331
0.70	0.8699	4.0830	0.8681	4.0830	0.8560	4.0829	1.0101	4.0706
0.80	0.8028	5.5116	0.8014	5.5115	0.8515	5.5067	0.9099	5.4980
0.90	0.7479	7.4387	0.7468	7.4390	0.7563	7.4367	0.7168	7.4493
1.00	0.7030	10.0427	0.7021	10.0427	0.6816	10.0450	0.6859	10.0469

Задача 2. Пусть относительно процесса (4.1), (4.2) дополнительно к наблюдениям (4.3) проводились наблюдения и в точках $x = 0.125$ и $x = 0.75$:

$$u(0.125, t) = e^{-2t}\sin(0.125\pi)\ ,\quad u(0.75, t) = e^{-2t}\sin(0.75\pi)\ ,\quad 0 \le t \le 1, \tag{4.4}$$

т.е. в данной задаче $N = 1, L = 4,\ l = 2,\ \ L > l$.

Параметры численных методов были аналогичны параметрам, используемым в задаче 1. Ясно, что точные решения задач 1 и 2 совпадают. В табл.2 приведены полученные результаты решения задачи 2 при различных уровнях помех на измеряемые величины (4.3), (4.4) состояния процесса.

Таблица 2
Полученное решение задачи 2 при разных уровнях помех

	$\chi = 0$		$\chi = 0.01$		$\chi = 0.03$	
t	$C_1(t)$	$C_2(t)$	$C_1(t)$	$C_2(t)$	$C_1(t)$	$C_2(t)$
0.02	1.9318	0.5308	1.9365	0.5302	1.9323	0.5306
0.10	1.7203	0.6749	1.7016	0.6759	1.7523	0.6554
0.20	1.4994	0.9110	1.4963	0.9133	1.3044	0.9267
0.30	1.3185	1.2297	1.3454	1.2294	1.2478	1.2434
0.40	1.1702	1.6600	1.2241	1.6525	1.0826	1.6714
0.50	1.0489	2.2408	1.0121	2.2452	1.1377	2.2299
0.60	0.9495	3.0248	0.9642	3.0240	1.0009	3.0171
0.70	0.8681	4.0830	0.8584	4.0832	0.8248	4.0864
0.80	0.8014	5.5115	0.7890	5.5125	0.7467	5.5178
0.90	0.7468	7.4390	0.7335	7.4413	0.7143	7.4435
1.00	0.7021	10.0427	0.7065	10.0422	0.7399	10.0384

Были проведены многочисленные другие численные эксперименты, приведение результатов которых заняло бы много места. Отметим лишь, что эти эксперименты показали возможность получения решения задач предлагаемым методом с требуемой высокой степенью точности и достаточно высокую его устойчивость к помехам в исходных данных задачи.

Из результатов, приведенных в таблицах следует, что предлагаемый подход позволяет достаточно точно определять значения идентифицируемых параметров, если дополнительная информация о состоянии процесса известна точно.

В случае наличия помех при проведении замеров, как и следовало ожидать. полученные значения параметров точно соответствуют полученной искаженной информации, а следовательно не соответствуют искомым значениям. С целью более точного определения искомых значений идентифицируемых параметров необходимо увеличение точности замеров или количества информации, т.е. точек или моментов времени замера параметров состояния процесса.

5. Выводы. В статье исследовано численное решение коэффициентно-обратных задач, описываемых уравнениями с частными производными, в которых идентифицируемые коэффициенты зависят лишь от одной переменной: временной или пространственной. Для идентификации коэффициентов проводятся дополнительные эксперименты, результаты наблюдений за которыми могут иметь различный характер. Предложен подход к решению рассматриваемых задач, основанный на использовании метода прямых для сведения задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с неизвестными параметрами. Используется специальное представление решения краевой задачи относительно исходной линейной системы дифференциальных уравнений с нелокальными условиями, с помощью которого задача параметрической идентификации сводится к решению вспомогательных краевых задач и одной системы алгебраических уравнений. Были проведены многочисленные численные эксперименты на специально построенных тестовых задачах с применением предложенных в данной работе формул и схем численного решения. Результаты экспериментов показали достаточно высокую эффективность для практического применения описанного подхода.

Литература

1. Kunze H., Vrscay E.R. Solving inverse problems for ordinary differential equations using the Picard contraction mapping // Inverse Problems. 1999, vol.15, pp.745–770.
2. Айда-заде К.Р. Численный метод восстановления параметров динамической системы // Кибернетика и системный анализ. 2004, №3, с.101–108.
3. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение некоторых обратных задач теплопроводности для составной пластины с использованием псевдообратных матриц // Доклады НАН Украины. 2011, № 12, с.28–34.
4. Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications. Germany, De Gruyter, 2011, p.459.
5. Hasanov A., Otelbaev M., Akpayev B. Inverse heat conduction problems with boundary and final time measured output data // Inverse Probl. Sci. Eng. – 2011, vol. 19, pp.895–1006.
6. Прилепко А.И., Костин А.Б. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Матем. сб. 1992, 183, № 4. с.49–68
7. Yan L, Fu C.L, Yang F.L. The method of fundamental solutions for the inverse heat source problem // Eng. Anal. Boundary Elements. 2008, vol.32, pp.216–222.
8. Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. О численном решении нагруженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2004, т.44, № 9, с.1585-1595.
9. Rothe E. Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionaler Randwertaufgaben. Math. Ann. –1930, vol.102, № 1, pp.650–670.

UOT 519.622.2

V.M. Abdullayev

Parabolik tip tənliklər üçün əmsal-tərs məsələnin ədədi həllinə yanaşma

Parabolik tənlik üçün bir sinif əmsal-tərs məsələsinin ədədi həlli tədqiq olunmuşdur. Düz xətlər üsulunun tətbiqi ilə məsələ naməlum parametrlərdən asılı adi diferensial tənliklər sisteminə gətirilmiş, onun həlli üçün yanaşma təklif olunmuşdur. Yanaşmada ilkin diferensial tənliklər sisteminə nəzərən sərhəd məsələsinin həlli üçün xüsusi ayrılışdan istifadə olunur. Nəticədə parametrik identifikasiya məsələsinin həlli köməkçi sərhəd məsələsinin və cəbri tənliklər sisteminin həllinə gətirilir. Ədədi eksperimentlərin nəticələri və analizi verilmişdir.

Açar sözlər: tərs məsələ, düz xətlər üsulu, parabolik tip tənlik, parametrik identifikasiya

V.M. Abdullayev

Approach to numerical solution to coefficient-inverse problems for parabolic equations

In the paper, we investigate numerical solution to coefficient inverse problems with respect to a parabolic type equation. We propose an approach to the solution to the considered problems, which is based on the use of the method of lines for reducing the initial problem to a system of ordinary differential equations with unknown parameters. Next we use a special representation of the solution to the derived boundary-value problem with respect to a linear system of differential equations with boundary conditions, with the help of which the parametric identification problem is reduced to the solution to auxiliary boundary-value problems and to a system of algebraic equations. We give the results of numerical experiments and carry out their analysis.

Keywords: inverse problem, method of lines, parabolic type equation, parametric identification

Институт Систем Управления НАН Азербайджана
Азербайджанский Государственный Университет Нефти и Промышленности
Представлено 06.12.2016