Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXVIII, No.3, 2018
www.icp.az/2018/3-04.pdf

УДК 519.852.6

К.Ш. МАМЕДОВ, Н.О. МАМЕДЛИ

МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЁННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЧАСТИЧНО-БУЛЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Рассматривается задача частично-Булевого программирования с интервальными данными. Введены понятия допустимого, оптимистического, пессимистического, субоптимистического и субпессимистического решений этой задачи. Разработаны методы построения субоптимистического и субпессимистического решений. Эти методы основаны на некоторой экономической интерпретации рассмотренной задачи. Проведены многочисленные вычислительные эксперименты над случайными задачами различной размерности и определены оценки погрешностей этих решений от оптимального. Эксперименты еще раз подтверждают высокую эффективность разработанных методов.

Ключевые слова: интервальная задача частично-Булевого программирования, оптимистическое, пессимистическое, субоптимистическое и субпессимистическое решения, верхняя и нижняя границы, погрешности, вычислительный эксперимент

1. Введение. Рассматривается следующая задача

$$\sum_{j=1}^{n}[\underline{c}_j,\overline{c}_j]x_j + \sum_{j=n+1}^{N}[\underline{c}_j,\overline{c}_j]x_j \to max \tag{1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n}[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]x_j + \sum_{j=n+1}^{N}[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]x_j \le [\underline{b}_i,\overline{b}_i]\,,(i=\overline{1,m}), \tag{1.2}$$

$$0 \le x_j \le 1, \left(j=\overline{1,N}\right), \tag{1.3}$$

$$x_j = 1 \vee 0, \left(j=\overline{1,n}\right), (n \le N). \tag{1.4}$$

Здесь предполагается, что $\underline{c}_j > 0$, $\overline{c}_j > 0$, $\underline{a}_{ij} \ge 0$, $\overline{a}_{ij} \ge 0$, $\underline{b}_i > 0$, $\overline{b}_i > 0$ $(i=\overline{1,m}\,,\, j=\overline{1,N})$ – заданные целые числа.

Отметим следующие естественные условия для коэффициентов задачи (1.1)-(1.4). Во-первых, для каждого i, $(i=\overline{1,m})$ должны удовлетворяться условия

$$\sum_{j=1}^{N}\underline{a}_{ij} > \overline{b}_i, (i=\overline{1,m}).$$

Наоборот, если для всех i эти условия не выполняются, то решение $X=(1,1,1,\dots,1)$ будет удовлетворять системе (1.2)-(1.4) и она будет оптимальным решением. С другой стороны, если для некоторой фиксированной i_* выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{N}\overline{a}_{i_*j} \le \underline{b}_{i_*}, (i=\overline{1,m}),$$

то неравенство i_* не является ограничением и его исключаем из системы (1.2). Мы предполагаем, что вышеуказанные естественные условия выполняются для задачи (1.1)-(1.4).

Эта задача называется задачей частично-Булевого программирования с интервальными данными или просто интервальная задача частично-Булевого программирования. Рассмотренная задача (1.1)-(1.4) является обобщением задач Булевого программирования, интервальных задач Булевого программирования и задач линейного программирования. Поскольку в случае $n=0$ получается задача линейного программирования с интервальными данными, при $n=N$ получается интервальная задача Булевого программирования, в случае

$\underline{c}_j = \overline{c}_j$, $\underline{a}_{ij} = \overline{a}_{ij}$, $\underline{b}_i = \overline{b}_i \left(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,N}\right)$ получается общеизвестная задача Булевого или частично-Булевого программирования. Необходимо отметить, что поскольку все частные случаи задачи (1.1)-(1.4) входят в класс NP-полных, то эта задача также входит в класс NP-полных, т.е. трудно-решаемых [1, с.123; 2, с.78]. Некоторые классы задач целочисленного программирования с интервальными данными исследованы в работах [3-9 и др.].

Насколько нам известно, интервальная задача частично-Булевого программирования ещё не исследована.

В данной работе для задачи (1.1)-(1.4) введены новые понятия: допустимое, оптимистическое, пессимистическое, субоптимистическое и субпессимистическое решения и разработаны методы их решения.

2. Постановка задачи. В начале для задач (1.1)-(1.4) зададим некоторую экономическую интерпретацию. Пусть имеется N объектов. Из них n типов $(n \leq N)$ объектов можно использовать либо игнорировать, а для остальных $N - n$ объектов можно использовать в некоторой степени. Если j-ый объект $\left(j = \overline{1,N}\right)$ выбирается для использования (или частичного использования), то возможные затраты входят в интервал $\left[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}\right]$ $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,N})$ при этом прибыль принадлежит интервалу $\left[\underline{c}_j, \overline{c}_j\right]$ $\left(j = \overline{1,N}\right)$. Допустим, что для использования этих объектов выделены ресурсы, входящие в интервал $\left[\underline{b}_i, \overline{b}_i\right]$ $(i = \overline{1,m})$. Требуется выбирать для использования (или частичного использования) такие объекты, суммарные затраты которых не превышали бы выделенных ресурсов, входящих в интервал $\left[\underline{b}_i, \overline{b}_i\right]$ $(i = \overline{1,m})$, а общая прибыль была максимальной. Очевидно, что принимая переменные

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-ый объект выбирается,} \\ 0, & \text{в противном случае } \left(j = \overline{1,n}\right) \end{cases}$$

и $0 \leq x_j \leq 1$ $\left(j = \overline{n+1,N}\right)$, то математическая модель задачи будет в виде (1.1)-(1.4).

Отметим, что такие задачи часто встречаются в таких областях поизводства, где выпускаются товары, часть которых должны быть штучными.

3. Теоретическое обоснование метода. Сначала введём некоторые понятия, обобщающие определения, введённые авторами в работе [10].

Определение 1. N-мерный вектор $X = (x_1, \ldots, x_N)$, удовлетворяющий системе условий (1.2)-(1.4) для $\forall\, a_{ij} \in \left[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}\right]$ и $\forall b_i \in \left[\underline{b}_i, \overline{b}_i\right]$, $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,N})$ называется допустимым решением задачи (1.1)-(1.4).

Из этого определения непосредственно следует, что понятия оптимального решения и оптимального значения функции (1.1) должны иметь другой смысл в отличие от известных. Потому, что необходимо обеспечивать не превышение суммы некоторых интервалов от заданного конкретного интервала $\left[\underline{b}_i, \overline{b}_i\right]$ и при этом достичь максимальности суммы некоторых других интервалов. С этой целью введём несколько следующих определений.

Определение 2. Оптимистическим решением задачи (1.1)-(1.4) назовём такое допустимое решение $X^{op} = \left(x_1^{op}, x_2^{op}, \ldots, x_N^{op}\right)$, которое удовлетворяет неравенствам $\sum_{j=1}^{N} \underline{a}_{ij} x_j^{op} \leq b_i$, для $\forall\, b_i \in \left[\underline{b}_i, \overline{b}_i\right]$, $(\, i = \overline{1,m}; j = \overline{1,N})$ и при этом значение функции $f^{op} = \sum_{j=1}^{N} \overline{c}_j x_j^{op}$ будет максимальным.

Определение 3. Пессимистическим решением задачи (1.1)-(1.4) назовём такое допустимое решение $X^{p} = \left(x_1^{p}, x_2^{p}, \ldots, x_N^{p}\right)$, которое удовлетворяет соотношениям $\sum_{j=1}^{N} \overline{a}_{ij} x_j^{p} \leq b_i$, для $\forall\, b_i \in \left[\underline{b}_i, \overline{b}_i\right]$, $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,N})$ и при этом значение функции $f^{p} = \sum_{j=1}^{N} \underline{c}_j x_j^{p}$ будет максимальным.

Из этих определений видно, что для нахождения оптимистического и пессимистического решений задачи (1.1)-(1.4) необходимо решить некоторую задачу частично-Булевого программирования, которая входит в класс NP-полных. А это требует достаточно большого времени для задач большой размерности. Поэтому мы ввели следующие понятия: субоптимистического и субпессимистического, т.е. приближённого решений задачи (1.1)-(1.4) и разработали алгоритмы их нахождения.

Определение 4. Субоптимистическим решением задачи (1.1)-(1.4) назовём такое допустимое решение $X^{so} = (x_1^{so}, x_2^{so}, \dots, x_N^{so})$, которое удовлетворяет условиям $\sum_{j=1}^{N} \underline{a}_{ij} x_j^{so} \leq b_i$, для $\forall\, b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i], (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,N})$ и при этом значение функции $f^{so} = \sum_{j=1}^{N} \overline{c}_j x_j^{so}$ будет принимать большое значение.

Определение 5. Субпессимистическим решением задачи (1.1)-(1.4) назовём такое допустимое решение $X^{sp} = \left(x_1^{sp}, x_2^{sp}, \dots, x_N^{sp}\right)$, которое удовлетворяет соотношениям $\sum_{j=1}^{N} \overline{a}_{ij} x_j^{sp} \leq b_i$ для $\forall\ b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i], (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,N})$ и при этом значение функции $f^{sp} = \sum_{j=1}^{N} \underline{c}_j x_j^{sp}$ будет принимать большое значение.

Отметим, что вышеуказанные определения являются обобщением определений, введённых в работе [11].

Используя вышеуказанную экономическую интерпретацию задачи (1.1)-(1.4) введённую в пункте 2, выведем критерии выбора неизвестных для присвоения конкретных значений. Пусть j-ый объект $(j = \overline{1,N})$ выбирается для использования (или частичного использования). Тогда, необходимые расходы должны входить в интервал $[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}] (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,N})$. В этом случае полученная прибыль входит в заданный интервал $[\underline{c}_j, \overline{c}_j] \left(j = \overline{1,N}\right)$.Очевидно, что прибыль на каждую единицу расхода, входящая в интервал $[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}] (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,N})$, будет составлять как минимум

$$\min_i \frac{[\underline{c}_j, \overline{c}_j]}{[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]} = \frac{[\underline{c}_j, \overline{c}_j]}{\max_i [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]} \ \left(j = \overline{1,N}\right).$$

Отсюда непосредственно видно, что необходимо выбрать номер j_*, который определяется из следующих условий:

$$\max_j \frac{[\underline{c}_j, \overline{c}_j]}{\max_i [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]} = \frac{[\ \underline{c}_{j_*}, \overline{c}_{j_*}]}{\max_i [\ \underline{a}_{ij_*}, \overline{a}_{ij_*}]}. \tag{3.1}$$

Используя формулу (3.1) и учитывая вышеприведённые определения 4, 5 получим следующие критерии выбора номера j_* неизвестных x_{j_*} для построения субоптимистического и субпессимистического решений соответственно:

$$j_* = arg \max_j \frac{\overline{c}_j}{\max_i \underline{a}_{ij}} \tag{3.2}$$

$$j_* = arg \max_j \frac{\underline{c}_j}{\max_i \overline{a}_{ij}} \tag{3.3}$$

Таким образом для построения субоптимистического решения можно использовать критерий (3.2), а для субпессимистического решения (3.3). При этом необходимо учитывать случай, в какой интервал входит найденный номер j_*, т.е. $j_* \in [1, \dots, n] \equiv T$ или $j_* \in [n + 1, n + 2, \dots, N] \equiv R$.

Учитывая эти обстоятельства, нами разработаны два метода для построения приближённого решения задачи (1.1)-(1.4).

В первом методе в случае, как только присвоить неизвестному x_{j_*}, $(j_* \in R)$ единицу невозможно, то для этой неизвестной принимаем возможные дробные значения, а остальные переменные естественно будут принимать значения нуль.

А во втором методе, как только неизвестному x_{j_*},$(j_* \in R)$ присвоить единицу невозможно, то найденные до тех пор значения неизвестных фиксируем, для остальных номеров j, $j \in T$ присваиваем $x_j := 0$ и для нефиксированных неизвестных x_j $(j \in R)$ построим задачу линейного программирования меньшей размерности. Далее решив полученную задачу линейного программирования, присоединяем найденные координаты решений к ранее фиксированным.

Процесс построения субоптимистического и субпессимистического решений начинается из начальных решений $X^{so} = (0,0, \dots ,0)$ или $X^{sp} = (0,0, \dots ,0)$.

Первый метод. Рассмотрим два случая:

1. Пусть $j_* \in T$. Тогда x_{j_*} может принимать значения 0 или 1. Если $\underline{a}_{ij_*} \le b_i$, для всех i, $(i = \overline{1,m})$, то принимается $x_{j_*} := 1$, $b_i := b_i - \underline{a}_{ij_*}$, $(i = \overline{1,m}), T := T \backslash \{j_*\}$, а если хотя бы для одного i $(i = \overline{1,m})$, $\underline{a}_{ij_*} > b_i$, то принимается $x_{j_*} := 0, T := T \backslash \{j_*\}$.

2. Пусть $j_* \in R$. Тогда неизвестный x_{j_*} должен принимать любые значения из интервала $[0; 1]$. В этом случае, если $\underline{a}_{ij_*} \le b_i$, для всех i, $(i = \overline{1,m})$, то принимаем $x_{j_*} := 1$, $b_i := b_i - \underline{a}_{ij_*}, (i = \overline{1,m})$, $R := R \backslash \{j_*\}$, а если хотя бы для одного i $(i = \overline{1,m})$, $\underline{a}_{ij_*} > b_i$, то принимаем $x_{j_*} := \min\limits_i b_i / \ \underline{a}_{ij_*}$, $R := R \backslash \{j_*\}$, $b_i := b_i - \ \underline{a}_{ij_*} x_{j_*}$. Очевидно, что в этом случае хотя бы для одного i $(i = \overline{1,m})$, получается $b_i = 0$ и на этом процесс решения завершается.

Для продолжения процесса построения субоптимистического решения $X^{so} = (x_1^{so}, x_2^{so}, \dots, x_N^{so})$ находим очередной номер j_* из критерия (3.2). Процесс построения суб-оптимистического решения завершается, если $T = \emptyset$ и $R = \emptyset$, т.е. все переменные рассмотрены. Отметим, что можно построить субпессимистическое решение $X^{sp} = \left(x_1^{sp}, x_2^{sp}, \dots, x_N^{sp}\right)$ задачи (1.1)-(1.4) аналогично вышеуказанному, только используя критерий (3.3).

Второй метод. Здесь первый пункт первого подхода остаётся в силе, а второй пункт принимает следующий вид:

Пусть номер j_* найденный по критерию (3.2), входит в множество R и присвоить единицу неизвестному x_{j_*} невозможно. Тогда принимаем $x_j := 0$ для $j \in T$. А для остальных переменных x_j $(j \in R)$ построим задачу линейного программирования и решим каким-нибудь известным методом. Очевидно, что размерность полученной задачи линейного программирования будет существенно меньшей. Эти обстоятельства ещё раз подтверждены при вычислительных экспериментах.

Наконец напишем алгоритм построения субоптимистического решения, который представлен выше. (Алгоритм построения субпессимистического решения составляется аналогично).

Алгоритм 1-ого метода.

Шаг 1. Ввод $N, n, \underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}, \underline{c}_j, \overline{c}_j, \underline{b}_i, \overline{b}_i, (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,N})$.

Шаг 2. Принять $b_i := \overline{b}_i, x_j^{so} := 0$ $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,N})$ и множества $T = \{1,2, \dots, n\}$, $R = \{n + 1, n + 2, \dots, N\}$.

Шаг 3. Найти номер j_* из критерия

$$j_* = arg \max_j \frac{\overline{c}_j}{\max\limits_{j \in T \cup R} \underline{a}_{ij}}$$

Шаг 4. Если $j_* \in T$ и для i $(i = \overline{1,m})$ выполняется соотношение $\underline{a}_{ij_*} \le \overline{b}_i$, то принять $x_{j_*}^{so} := 1, \overline{b}_i := \overline{b}_i - \underline{a}_{ij_*}, T := T\backslash\{j_*\}$ и переход к шагу 3.
Шаг 5. Если $j_* \in T$ и хотя бы для одного i $(i = \overline{1,m})$ выполняется соотношение $\underline{a}_{ij_*} > \overline{b}_i$, то принять $x_{j_*}^{so} := 0, T := T\backslash\{j_*\}$ и переход к шагу 3.
Шаг 6. Если $j_* \in R$ и для любого i $(i = \overline{1,m})$ $\underline{a}_{ij_*} \le \overline{b}_i$, то принимаем $x_{j_*}^{so} := 1$, $\overline{b}_i := \overline{b}_i - \underline{a}_{ij_*}$, $R := R\backslash\{j_*\}$и переход к шагу 3.
Шаг 7. Если $j_* \in R$ и хотя бы для одного i $(i = \overline{1,m})$ выполняется соотношение $\underline{a}_{ij_*} > \overline{b}_i$, то принять $x_{j_*}^{so} := \min_i \frac{\overline{b}_i}{\underline{a}_{ij_*}}$, $R := R\backslash\{j_*\}$ и $x_{j_*}^{so} := 0, j \in T \cup R$.
Шаг 8. Вычислить $f^{so} := \sum_{j=1}^{N} \overline{c}_j x_j^{so}$.
Шаг 9.Печать $f^{so}, x^{so} = (x_1^{so}, x_2^{so}, \dots, x_N^{so})$.
Шаг 10. Stop.

Отметим, что применением вышеуказанного алгоритма находится субоптимистическое решение задачи (1.1)-(1.4). А для построения субпессимистического решения можно использовать этот же алгоритм полностью, только вместо использования критерия (3.2) необходимо использовать критерий (3.3). Необходимо заметить, что алгоритм построения субоптимистического и субпессимистического решений вторым методом, можно использовать этот алгоритм, но в случае $j_* \in T$ и хотя бы для одного i $(i = \overline{1,m})$ выполняется соотношение $\underline{a}_{ij_*} > \overline{b}_i$, то для всех остальных нефиксированных переменных j, $j \in R$ составляем задачу линейного программирования меньшей размерности и решаем. Далее полученное решение присоединяем к фиксированным координатам решения.

Для оценки погрешностей полученных субоптимистических и субпессимистических значений от оптимистического и пессимистического значений исходная задача решается как задача линейного программирования и получаются соответствующие значения $\overline{f^{op}}$ и $\overline{f^{pes}}$. Тогда относительные погрешности оцениваются следующим образом:

$$\delta_{so}^1 = \frac{\overline{f}_o - f_{so}^1}{\overline{f}_o}, \delta_{so}^2 = \frac{\overline{f}_o - f_{so}^2}{\overline{f}_o}, \delta_{sp}^1 = \frac{\overline{f}_p - f_{sp}^1}{\overline{f}_p}, \qquad \delta_{sp}^2 = \frac{\overline{f}_p - f_{sp}^2}{\overline{f}_p}.$$

Здесь f_{so}^1 f_{so}^2 , f_{sp}^1 f_{sp}^2 являются субоптимистическим и субпессимистическим значениями целевой функции, полученные методами 1 и 2.

Необходимо отметить, что при разработке методов решения задач (1.1)-(1.4) были использованы идеи работ [12-17].

4. Результаты вычислительных экспериментов.

Для выявления качества разработанных алгоритмов в данной работе составлены программы этих алгоритмов и был проведён ряд вычислительных экспериментов над задачами большой размерности. Используя работу [14] коэффициенты этих задач выбраны как псевдослучайные двухзначные или трёхзначные числа следующим образом:

I. $0 \le \underline{a}_{ij} \le 99, 1 \le \overline{a}_{ij} \le 99, 1 \le \underline{c}_j \le 99, 1 \le \overline{c}_j \le 99, (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,N})$.

II. $0 \le \underline{a}_{ij} \le 999, 1 \le \overline{a}_{ij} \le 999, 1 \le \underline{c}_j \le 999, 1 \le \overline{c}_j \le 999. (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,N})$.

$$\underline{b_i} := [\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{N} \underline{a}_{ij}], \qquad \overline{b_i} := [\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{N} \overline{a}_j].$$

Результаты вычислительных экспериментов представлены в следующих таблицах, где для каждой размерности вычислены 5 различных задач.

Таблица 1

Субоптимистические, субпессимистические значения и погрешности для задач с двухзначными коэффициентами. $(\boldsymbol{N = 1000; n = 600; m = 10})$

№	1	2	3	4	5
$\overline{f_{op}}$	45911.804	45296.379	44437.319	45092.610	44435.775
$\underline{f_{sop}^1}$	44627.593	44136.731	43596.684	44301.667	43647.305
$\underline{f_{sop}^2}$	44679.811	44198.527	43610.339	44358.495	43675.640
δ_{sop}^1	0.028	0.026	0.019	0.018	0.018
δ_{sop}^2	0.027	0.024	0.019	0.016	0.017
k_{sop}^1	0	266	271	269	276
k_{sop}^2	199	225	211	213	220
$\overline{f_{pes}}$	27827.451	28181.955	28069.358	27822.487	27432.328
$\underline{f_{pes}^1}$	27642.257	27889.179	27762.000	27613.937	27139.276
$\underline{f_{pes}^2}$	27642.720	27903.243	27762.000	27630.092	27153.737
δ_{pes}^1	0.007	0.010	0.011	0.007	0.011
δ_{pes}^2	0.007	0.010	0.011	0.007	0.010
k_{pes}^1	0	266	271	269	276
k_{pes}^2	266	271	269	276	280

Таблица 2

Субоптимистические, субпессимистические значения и погрешности для задач с двухзначными коэффициентами. $(\boldsymbol{N = 1000; n = 600; m = 20})$

№	1	2	3	4	5
$\overline{f_{op}}$	44558.482	44578.974	44549.899	44331.719	45163.213
$\underline{f_{sop}^1}$	43686.783	43651.345	43832.747	43485.686	44285.322
$\underline{f_{sop}^2}$	43699.872	43690.058	43873.767	43538.872	44335.886
δ_{sop}^1	0.020	0.021	0.016	0.019	0.019
δ_{sop}^2	0.019	0.020	0.015	0.018	0.018
k_{sop}^1	0	274	277	269	262
k_{sop}^2	215	216	207	214	204
$\overline{f_{pes}}$	27387.866	28024.450	28307.311	27735.449	28068.734
$\underline{f_{pes}^1}$	27232.233	27801.020	28070.397	27506.313	27902.925
$\underline{f_{pes}^2}$	27236.860	27820.880	28078.158	27507.472	27926.215
δ_{pes}^1	0.006	0.008	0.008	0.008	0.006
δ_{pes}^2	0.006	0.007	0.008	0.008	0.005
k_{pes}^1	0	274	277	269	262
k_{pes}^2	274	277	269	262	255

Таблица 3

Субоптимистические, субпессимистические значения и погрешности для задач с трёхзначными коэффициентами. $(\boldsymbol{N = 1000;\ n = 600;\ m = 10})$

№	1	2	3	4	5
$\overline{f_{op}}$	416772.431	407262.286	400559.019	410320.331	402729.978
$\underline{f_{sop}^1}$	403111.858	396721.293	390388.890	401217.913	392177.833

$\underline{f_{sop}^2}$	403492.387	396912.010	390687.146	401814.400	392573.481
δ_{sop}^1	0.033	0.026	0.025	0.022	0.026
δ_{sop}^2	0.032	0.025	0.025	0.021	0.025
k_{sop}^1	0	265	274	265	279
k_{sop}^2	218	237	214	226	232
$\overline{f_{pes}}$	280754.495	284249.634	282822.257	280536.958	277027.700
$\underline{f_{pes}^1}$	278290.868	280818.009	279785.821	278534.584	274033.651
$\underline{f_{pes}^2}$	278305.366	280972.875	279895.739	278678.161	274132.534
δ_{pes}^1	0.009	0.012	0.011	0.007	0.011
δ_{pes}^2	0.009	0.012	0.010	0.007	0.010
k_{pes}^1	0	265	274	265	279
k_{pes}^2	265	274	265	279	279

Таблица 4

Субоптимистические, субпессимистические значения и погрешности для задач с трёхзначными коэффициентами. $(\boldsymbol{N = 1000};\ \boldsymbol{n = 600};\ \boldsymbol{m = 20})$

№	1	2	3	4	5
$\overline{f_{op}}$	404404.226	402832.603	401253.637	398984.099	408101.888
$\underline{f_{sop}^1}$	396514.323	394303.641	394400.295	390595.070	399856.236
$\underline{f_{sop}^2}$	396927.360	394706.905	394672.167	390759.711	400023.235
δ_{sop}^1	0.020	0.021	0.017	0.021	0.020
δ_{sop}^2	0.018	0.020	0.016	0.021	0.020
k_{sop}^1	0	276	278	270	265
k_{sop}^2	223	222	220	227	210
$\overline{f_{pes}}$	275338.802	281891.691	284695.912	278584.081	282174.598
$\underline{f_{pes}^1}$	273408.051	279153.037	281707.163	275824.704	279565.389
$\underline{f_{pes}^2}$	273534.686	279358.415	281821.494	275861.689	279724.507
δ_{pes}^1	0.007	0.010	0.010	0.010	0.009
δ_{pes}^2	0.007	0.009	0.010	0.010	0.009
k_{pes}^1	0	276	278	270	265
k_{pes}^2	276	278	270	265	256

В таблицах приняты следующие обозначения:

N – число всех переменных;

n – число целых переменных;

$\overline{f_o}, \overline{f_{pes}}$ – верхние границы субоптимистического и субпессимистического значений функционала задачи (1.1)-(1.4) соответственно;

$f_{so}^1, f_{so}^2,\ f_{sp}^1,\ f_{sp}^2$ – субоптимистические и субпессимистические значения целевой функции, полученные 1-ым и 2-ым методами соответственно;

$\delta_{so}^1,\ \ \delta_{so}^2, \delta_{sp}^1,\ \ \delta_{sp}^1$ – относительные погрешности субоптимистического и субпессимистического значений целевой функции от оптимистического и пессимистического значений, полученные 1-ым и 2-ым методами соответственно;

$k_{so}^1,\ k_{sp}^1$ – число непрерывных переменных после применения метода 1, которой присваивается нуль;

k_{so}^2, k_{sp}^2 – число оставшихся непрерывных переменных задачи (1.1)-(1.4) для применения метода 2 с целью построения субоптимистического и субпессимистического решений соответственно.

5. Вывод. Из вышеприведённых таблиц видно, что субоптимистические и субпессимистические значения целевой функции, полученные методами 1 и 2, не сильно отличаются друг от друга. Учитывая, что в методе 2 используется аппарат задач линейного программирования, т.е. симплекс метод, более практичным можно считать метод 1. Относительные погрешности субоптимистических и субпессимистических значений целевой функции от верхней и нижней границ оптимистического и пессимистического значений меняются в пределах 0,015-0,033 и 0,005-0,012 соответственно. А это означает, что применение методов, разработанных в данной работе, даёт значение относительной погрешности не больше 2,8%. С другой стороны, после применения 2-го метода для построения субоптимистического решения в среднем остается 106 переменных из 500, 213 из 1000 переменных, а для построения субпессимистического решения оставшееся число переменных составляет 136 из 500, и 272 из 1000 переменных. Эти результаты ещё раз подтверждают эффективность и практичность разработанных в данной работе методов.

Литература

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982, с.416.
2. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979, с.536.
3. Libura M. Integer programming problems with inexact objective function. Contr. And Cybern. 1980, Vol.9, № 4, pp.189-202.
4. Рощин В. А., Семенова Н.В., Сергиенко И.В. Декомпозиционный подход к решению некоторых задач целочисленного программирования с неточными данными. ЖВМ и МФ.1990, Т.30, № 5, с.786-791.
5. Девятерикова М.В., Колоколов А.А. Алгоритмы перебора L-классов для задачи о рюкзаке с интервальными данными. Преринт. Омск: Ом ГУ, 2001, с.20.
6. Девятерикова М.В., Колоколов А.А., Колосов А.П. Алгоритмы перебора L-классов для булевой задачи о рюкзаке с интервальными данными Материалы III Всероссийской конференции “Проблемы оптимизации и экономическое приложение”. Омск: Изд-во Ом ГТУ, 2006, с.87.
7. Emelichev V.A., Podkopaev D.P. Quantitative stability analysis for vector problems of 0-1 programming. “Discrete Optimitation”, 2010, № 7, pp.48-63.
8. Мамедов К.Ш., Мамедова А.Г. Методы построения субоптимистических и субпессимистических решений в задаче Булевого программирования с интервальными данными //Изв. НАН Азербайджана//, 2014, №3, с.125-131.
9. Мамедов К.Ш., Мамедова А.Г. Методы построения субоптимистических и субпессимистических решений задачи Булевого программирования с целочисленными данными. ИС.: Вестник современной науки 2015, №2, с.6-19.
10. Мамедов К.Ш., Мамедли Н.О. Методы построения субоптимистического и субпессимистического решений частично-Булевой задачи о ранце с интервальными данными //Изв. НАН Азербайджана//, 2016, №6, с.6-13.
11. Мамедов К.Ш., Мамедова А.Г. Понятия субоптимистического и субпессимистического решений и построение их в интервальной задаче Булевого программирования // Радиоэлектроника, Информатика, Управление //, 2016, №3(38), с.99-107.
12. Martello S., Toth P. Knapsack problems, Algorithm and Computers implementations. John Wiley & Sons, Chichster, 1990, p.296.
13. Ковалев М.М. Дискретная оптимизация (целочисленное программирование). М. УРСС, 2003, с.192.
14. Бабаев Дж.А., Мамедов К.Ш., Мехтиев М.Г. Методы построения субоптимальных решений многомерной задачи о ранце. ЖВМ и МФ, 1978, Т.28, №6, с.1443 - 1453.
15. Мамедов К.Ш., Мусаева Т.М. Методы построения приближенных решений многомерной задачи о ранце и нахождение верхней оценки оптимума. Ж. «Автоматика и Вычислительная Техника», 2004, №5, с.72-82.
16. Мамедов К.Ш., Гусейнов С. Я. Методы построения субоптимальных решений задач целочисленного программирования и их последовательное улучшение. Ж. «Автоматика и Вычислительная техника», 2007, №6, с.20-31.
17. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. Пер. с англ. М.: Мир, 1987, с.360.

UOT 519.852.6

K.Ş. Məmmədov, N.O. Məmmədli

Verilənləri intervallar olan qismən Bul proqramlaşdırması məsələsinin təqribi həll üsulları

Verilənləri intervallar olan qismən Bul proqramlaşdırması məsələsi üçün mümkün həll, optimist, pessimist, suboptimist və subpessimist həll anlayışları verilmişdir. Suboptimist və subpessimist həllərin qurulması üçün üsullar işlənmişdir. Müxtəlif böyük ölçülü məsələlər üzərində çoxsaylı hesablama eksperimentləri aparılmışdır və bu eksperimentlər işdə təklif olunmuş üsulların yüksək effektliyə malik olmasını bir daha təsdiq etmişdir.

Açar sözlər: intervallı qismən Bul proqramlaşdırılması məsələsi, optimist, pessimist, suboptimist və subpessimist həllər, yuxarı və aşağı sərhədlər, xətalar, hesablama eksperimentləri

K.Sh. Mammadov, N.O. Mammadli

Methods of approximate solution of mixed-Boolean programming problems with interval data

The authors introduce concepts of feasible, optimistic, pessimistic, suboptimistic and subpessimistic solutions of mixed-Boolean programming problems with interval data. Methods are developed for the construction of suboptimistic and subpessimistic solutions. Numerous computational experiments are carried out on different large-scale problems with random coefficients and these experiments again confirm high efficiency of the methods presented in the paper.

Keywords: mixed-Boolean programming problem with interval data, optimistic, pessimistic, suboptimistic and subpessimistic solutions, upper and low bounds, errors, computational experiments

Институт Систем Управления НАН Азербайджана Представлено 14.09.2017