

UOT 519.852.6

K.Ş. MƏMMƏDOV, N.N. MƏMMƏDOV

## TAMƏDƏDLİ ÇANTA MƏSƏLƏSİNDƏ MƏQSƏD FUNKSİYASINA GÖRƏ ZƏMANƏTLİ SUBOPTIMAL HƏLLİN TAPILMASI ÜSULU

*Tamədədli çanta məsələsində məqsəd funksiyasına görə zəmanətli həll və zəmanətli suboptimal həll anlayışları verilmişdir. Funksionalın qiymətinin qeyd olunmuş ədəddən az olmamasına zəmanət verən həllin tapılması üçün onun əmsallarının verilmiş tamədədli intervallar daxilində minimal artırılıb-azaldılması algoritmi işlənilmişdir. Bu algoritim bir ədədi misala tətbiq olunmuşdur.*

**Açar sözlər:** Tamədədli çanta məsələsi, funksionala görə zəmanətli həll və zəmanətli suboptimal həll, dixotomiya prinsipi, algoritim, hesablama eksperimentləri

1. **Giriş:** Aşağıdakı kimi tamədədli çanta məsələsinə baxaq:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad (1.1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b, \quad (1.2)$$

$$0 \leq x_j \leq d_j, \quad (j = \overline{1, n}) \text{ və tamdırlar.} \quad (1.3)$$

Burada  $c_j > 0$ ,  $a_j > 0$ ,  $d_j > 0$ ,  $(j = \overline{1, n})$ ,  $b > 0$  verilmiş ədədlərdir. Ümumiliyi pozmadan bu ədədləri tam ədədlər qəbul edə bilərik. Əvvəlcə (1.1)-(1.3) məsələsinə bir iqtisadi interpretasiya verək. Tutaq ki, müəyyən bir müəssisə (şirkət, zavod və s.)  $n$  növ müxtəlif məhsullar istehsal etməlidir və bu məhsullar sayla ifadə olunmalıdır. Əgər  $j$ -ci  $(j = \overline{1, n})$  növ məhsul istehsal olunarsa, onda bu məhsulun hər biri üçün  $a_j$   $(j = \overline{1, n})$  miqdarda resurs sərf olunmalıdır və bu zaman həmin məhsulun hər vahidinin satışından  $c_j$   $(j = \overline{1, n})$  qədər gəlir (mənfəət, qazanc və s.) əldə olunur. Tutaq ki, bu məhsulların istehsalı üçün  $b$  miqdarda ümumi resurs (xammal, kapital qoyuluşu, vəsait və s.) ayrılmışdır. Bundan əlavə, fərz edək ki, hər bir  $j$ -ci  $(j = \overline{1, n})$  növ məhsuldan ən çoxu  $d_j$ ,  $(j = \overline{1, n})$  miqdarda istehsal oluna bilər. Onda bu məsələ aşağıdakı kimi qoyulmalıdır: Hansı məhsuldan neçə ədəd istehsal olunmalıdır ki, onların istehsalına sərf olunan resursların toplam miqdarı, əvvəlcədən ayrılmış  $b$  miqdarda limit resursdan çox olmasın və eyni zamanda onların satışından əldə olunan gəlir (mənfəət, qazanc, effekt və s.) maksimal olsun.

Aydındır ki,  $[0, d_j]$ ,  $(j = \overline{1, n})$  intervallarına daxil olan və tam ədədlərlə qiymət alan  $x_j$ ,  $(j = \overline{1, n})$  məchulları qəbul etməklə bu məsələnin riyazi modeli (1.1)-(1.3) şəkilində alınar. Burada  $x_j$ ,  $(j = \overline{1, n})$  məchulu istehsal olunması məchulun miqdarını göstərir.

Biz bu işdə (1.1)-(1.3) məsələsinə aid zəmanətli həll və zamanlı suboptimal həll anlayışları vermişik. Zəmanətli suboptimal həllin tapılması üçün bir üsul işləmişik.

Məlum olduğu kimi, bu məsələ çətin həll olunan məsələlər sinfinə, yəni NP-tam sinfə aiddir. Başqa sözlə onun optimal həllinin tapılması üçün polinomial zaman mürəkkəbliyinə malik üsullar yoxdur. Digər tərəfdən bu məsələnin optimal həllinin tapılması üçün “budaqlanmalar və sərhədlər”, “dinamik proqramlaşdırma” və “kombinator” tipli üsullar var [1-6, və s.]. Lakin bu üsullar məchulların  $n$  sayının böyük qiymətlərində məsələni real zaman müddətində həll edə bilmir. Ona görə də bu məsələnin optimal həldən çox da ciddi fərqlənməyən suboptimal (təqribi) həllərinin qurulması üçün sürətlə yerinə yetirilən (yəni polinomial zaman mürəkkəbliyinə malik) alqoritmlər işlənilmişdir [2, 4-5, 7-8, və s.].

**2. Məsələnin qoyuluşu:** Fərz edək ki, (1.1)-(1.3) məsələsi məlum üsullardan hər hansı biri ilə həll olunub və onun  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  optimal həlli və bu həllin (1.1) funksiyaasına verdiyi

$$f^* = \sum_{j=1}^n c_j x_j^*$$

maksimal qiyməti tapılmışdır. Tutaq ki, verilmiş məlum  $b$  vəsaitini və  $a_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) resurs hissələrini dəyişmədən daha çox gəlir əldə etmək istəyirik. Aydındır ki, bu məqsədə çatmaq üçün  $c_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) bazar qiymətləri müəyyən qeyd olunmuş intervallarda artırılıb-azaldılmalıdır. Yəni, satış qiymətlərində elə dəyişiklik edilməlidir ki, əldə olunan yeni gəlir müəyyən  $f^* + \Delta^*$  ədədindən az olmasın. Əgər ilkin maksimal gəlir ən azı  $p\%$  artırılmalıdırsa, onda  $\Delta^* = \left[ f^* \frac{p}{100} \right]$  kimi seçilə bilər. Beləliklə,  $a_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) xərclərini və ayrılmış  $b$  resursunu dəyişmədən (1.1) funksiyaasının əmsallarının üzərinə qeyd olunmuş tamədədli  $[\alpha_j, \beta_j]$ , ( $j = \overline{1, n}$ ) intervallarında yerləşən elə minimal ədədlər əlavə etməliyik ki, nəticədə alınmış həll (1.1) funksiyaasının qiymətlərinin  $f^* + \Delta^*$  kəmiyyətindən az olmamasına zəmanət versin. Burada  $\alpha_j \leq 0$  və  $\beta_j \geq 0$ , ( $j = \overline{1, n}$ ) şərtlərini ödəməlidir.

Qeyd etmək lazımdır ki, maliyyə çətinlikləri şəraitində belə məsələlərin həll olunmasının aktualığı heç bir şübhə doğurmur. Beləliklə aşağıdakı kimi yeni riyazi modeli alırıq:

$$\sum_{j=1}^n (c_j + \delta_j) x_j \rightarrow \max, \quad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b, \quad (2.2)$$

$$0 \leq x_j \leq d_j, \quad j = \overline{1, n} \text{ və tamdırlar}, \quad (2.3)$$

$$\alpha_j \leq \delta_j \leq \beta_j, \quad (j = \overline{1, n}) \text{ və tamdır}. \quad (2.4)$$

Burada  $\delta_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) məchul tam ədədlərdir və  $\alpha_j \leq 0$ ,  $\beta_j \geq 0$ , ( $j = \overline{1, n}$ ) şərtləri ödənilməlidir. Çünki,  $\delta_j \in [\alpha_j, 0)$  ( $j = \overline{1, n}$ ) olarsa uyğun  $c_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) qiymətləri  $\delta_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) qədər azaldılmalıdır, əgər  $\delta_j \in [0, \beta_j]$  ( $j = \overline{1, n}$ ) olarsa uyğun  $c_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) qiymətləri  $\delta_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) qədər artırılmalıdır. Digər tərəfdən, (2.1) funksiyaası qeyri xəttidir, çünki orada  $\delta_j x_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) hasilləri iştirak edir. Bu isə (2.1)-(2.4) məsələsinin həllini bir daha çətinləşdirir.

Beləliklə, məsələnin qoyuluşuna əsasən aşağıdakı riyazi modeli alırıq:

$$\delta_j \rightarrow \min, \quad (j = \overline{1, n}) \quad (2.5)$$

$$\sum_{j=1}^n (c_j + \delta_j) x_j \geq f^* + \Delta^*, \quad (2.6)$$

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b, \quad (2.7)$$

$$\alpha_j \leq \delta_j \leq \beta_j, \quad (j = \overline{1, n}) \text{ və tamdırlar}, \quad (2.8)$$

$$0 \leq x_j \leq d_j, \quad j = \overline{1, n} \text{ və tamdırlar}. \quad (2.9)$$

Burada  $c_j > 0$ ,  $a_j > 0$ ,  $d_j > 0$ ,  $\alpha_j \leq 0$ ,  $\beta_j \geq 0$ , ( $j = \overline{1, n}$ ) və  $b > 0$  verilmiş sabit tam ədədlərdir.

**3. Üsulun nəzəri əsaslandırılması:** (2.5)-(2.9) məsələsini həll etmək üçün müəlliflərin [7-9] işlərinə uyğun olaraq aşağıdakı bəzi anlayışları verək:

**Tərif 3.1:** (2.5)-(2.9) məsələsinin mümkün həlli elə  $n$  ölçülü  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  vektoruna deyilir ki, qeyd olunmuş  $\delta_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) kəmiyyətləri üçün (2.6)-(2.9) şərtləri ödənilsin.

**Tərif 3.2:** (2.5)-(2.9) məsələsinin funksionala görə zamanətli həlli elə  $n$  ölçülü  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  mümkün həllinə deyəcəyik ki, o  $\delta_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) kəmiyyətlərinə ən kiçik qiymət versin.

Göründüyü kimi (2.5)-(2.9) məsələsi çox kriteriyalı qeyri-xətti tamədədli proqramlaşdırma məsələsidir. Bu məsələ də NP-tam sinifdə olduğundan, məchulların  $n$  sayının böyük qiymətlərində onların optimal həllərinin tapılması üçün real zaman müddətində işləyən alqoritmlər mövcud deyil. Praktikanın tələblərini ödəmək məqsədi ilə, həm də bir yeni riyazi məsələ kimi (2.5)-(2.9) məsələsinin təqribi (suboptimal) həllərinin tapılması zərurəti meydana çıxır. Bu məqsədlə aşağıdakı anlayışı da verməliyik.

**Tərif 3.3:** (2.5)-(2.9) məsələsinin funksionala görə zamanətli suboptimal həlli elə  $n$  ölçülü  $X^z = (x_1^z, x_2^z, \dots, x_n^z)$  mümkün həllinə deyəcəyik ki, o,  $\delta_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) kəmiyyətlərinə kiçik qiymət versin.

Qeyd etmək lazımdır ki, bu işin müəllifləri tərəfindən [9-11] işlərində  $a_j$  və  $c_j$ , ( $j = \overline{1, n}$ ) əmsallarını dəyişmədən məhdudiyyət şərtlərinin sağ tərəfi olan  $b$  ədədini dəyişməklə zamanətli həll və zamanətli suboptimal həll anlayışları verilmiş və onların tapılması alqoritmləri işlənmişdir. Bu işdə isə həmin işlərdən fərqli olaraq məhdudiyyət şərtlərinin sağ tərəfi olan  $b$  ədədi və  $a_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) əmsalları sabit qalmaqla,  $c_j$ , ( $j = \overline{1, n}$ ) əmsallarının dəyişdirilməsi əsasında funksionalın qiymətinə görə zamanətli suboptimal həll axtarılır.

Qeyd edək ki, (1.1)-(1.3) məsələsinin xüsusi halı olan çanta məsələsi üçün bu işin müəllifləri tərəfindən [12] işində funksionala görə zamanətli suboptimal həllin tapılması üsulu işlənmişdir. Bu işdə isə daha geniş sinif olan tamədədli çanta məsələsi üçün belə həllin tapılması alqoritmi verilmişdir.

Bir daha qeyd edək ki, maliyyə çatışmamazlığı şəraitində belə məsələnin həlli iqtisadiyyat üçün çox əhəmiyyətlidir, çünki bazar qiymətlərinin optimal dəyişdirilməsi məsələsi həll olunur.

Fərz edək ki, (1.1)-(1.3) məsələsinin hər hansı  $X^s = (x_1^s, x_2^s, \dots, x_n^s)$  suboptimal həlli və (1.1) funksiyanın uyğun

$$f^s = \sum_{j=1}^n c_j x_j^s$$

qiyməti tapılmışdır. Onda müəyyən  $\Delta^s = \left[ f^s \frac{p}{100} \right]$  ədədini təyin edə bilərik. Burada  $p$  kəmiyyəti  $f^s$  qiymətinin artım faizidir,  $[z]$  – işarəsi isə  $z$  ədədinin tam hissəsini göstərir. Aydındır ki,  $[\alpha_j, \beta_j]$  ( $j = \overline{1, n}$ ) intervallarında  $\delta_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) parametrlərini elə minimal qiymətlərini tapmalıyıq ki, (2.6)-(2.9) münasibətləri ödənilsin. (2.5)-(2.9) məsələsinin zamanətli suboptimal həllini tapmaq məqsədilə, yəni  $\delta_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) parametrlərinin axtarılan minimal qiymətlərini tapmaq üçün, hesablama prosesini aşağıdakı kimi aparırıq.

Biz  $\delta_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) kəmiyyətlərini minimallaşdırmaq istədiyimizdən əvvəlcə onlara mümkün  $\alpha_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) qiymətlərini verməliyik, yəni  $\delta_j := \alpha_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) mənimsətməliyik. Digər tərəfdən verilmiş  $c_j$ , ( $j = \overline{1, n}$ ) ədədlərinin başlanğıc qiymətlərini yadda saxlamaq məqsədi ilə  $c'_j := c_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) mənimsədib, bundan sonra  $c_j := c'_j + \delta_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) qəbul edək. Alınmış yeni (1.1)-(1.3) məsələsinin  $X^{s,0} = (x_1^{s,0}, x_2^{s,0}, \dots, x_n^{s,0})$  suboptimal həllini tapıb, uyğun

$$f^{s,0} = \sum_{j=1}^n c_j x_j^{s,0}$$

qiymətini hesablayaq. Qeyd edək ki,  $X^{s,0} = (x_1^{s,0}, x_2^{s,0}, \dots, x_n^{s,0})$  suboptimal həllini tapılması üçün məlum üsullardan, məsələn [8, s.109-115] işindən istifadə etmək olar. Burada aydındır ki,  $f^{s,0} < f^s + \Delta^s$  olacaqdır, çünki cari  $\delta_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) kəmiyyətləri mənfi ədədlərdir.

Əvvəlcə  $\alpha_j^1 = \alpha_j, \beta_j^1 = \beta_j, (j = \overline{1, n})$  qəbul edək.

Dixotomiya prinsipindən istifadə edərək növbəti yeni (1.1)-(1.3) tipli məsələni qurmaq üçün  $\delta_j^1 := \left\lfloor \frac{\alpha_j^1 + \beta_j^1}{2} \right\rfloor$  ( $j = \overline{1, n}$ ) qəbul edək və yeni  $c_j := c_j' + \delta_j^1 (j = \overline{1, n})$  əmsallarını hesablayaq. Alınmış cari (1.1)-(1.3) məsələsi üçün  $X^{s,1} = (x_1^{s,1}, x_2^{s,1}, \dots, x_n^{s,1})$  suboptimal həllini və uyğun

$$f^{s,1} = \sum_{j=1}^n c_j x_j^{s,1}$$

qiymətini tapmaq.

Təbii ki, burada yalnız iki hal mümkündür: I)  $f^{s,1} < f^s + \Delta^s$ . II)  $f^{s,1} \geq f^s + \Delta^s$ . Birinci hal üçün  $\alpha_j^2 := \delta_j^1, \beta_j^2 := \beta_j^1$  və  $\delta_j^2 := \left\lfloor \frac{\alpha_j^2 + \beta_j^2}{2} \right\rfloor, (j = \overline{1, n})$  mənimsədərək, yenidən  $c_j := c_j' + \delta_j^2$  ( $j = \overline{1, n}$ ) qəbul edib cari (1.1)-(1.3) məsələsinin  $X^{s,2} = (x_1^{s,2}, x_2^{s,2}, \dots, x_n^{s,2})$  həllini və uyğun

$$f^{s,2} = \sum_{j=1}^n c_j x_j^{s,2}$$

qiymətini təyin edirik.

İkinci halda, yəni  $f^{s,1} \geq f^s + \Delta^s$  olarsa, onda  $X^z := X^{s,1}$  və  $\bar{\delta}_j := \delta_j^1$  ( $j = \overline{1, n}$ ) mənimsədərək  $\alpha_j^2 := \alpha_j^1, \beta_j^2 := \delta_j^1, \delta_j^2 := \left\lfloor \frac{\alpha_j^2 + \beta_j^2}{2} \right\rfloor, c_j := c_j' + \delta_j^2, (j = \overline{1, n})$  qəbul edirik.

Məqsədimiz  $\delta_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) kəmiyyətlərini minimallaşdırmaq olduğundan alınmış cari (1.1)-(1.3) məsələsinin  $X^{s,2} = (x_1^{s,2}, x_2^{s,2}, \dots, x_n^{s,2})$  həllini və (1.1) funksiyanın uyğun

$$f^{s,2} = \sum_{j=1}^n c_j x_1^{s,2}$$

qiymətini təyin edirik.

Bu arada aşağıdakı teoremi isbat edək:

**Teorem 3.1:** Əgər müəyyən  $k$ -cı addımda  $|\beta_j^k - \alpha_j^k| \leq 1$  münasibətləri istənilən  $j, (j = \overline{1, n})$  üçün ödənilərsə onda  $X^{s,k} = (x_1^{s,k}, x_2^{s,k}, \dots, x_n^{s,k})$  həlli (1.1)-(1.3) məsələsinin funksionala görə zamanətli suboptimal həlli olar.

**İsbatı:**  $[\alpha_j^k, \beta_j^k], (j = \overline{1, n})$  intervalının orta nöqtəsini

$$\theta_j^k = \left\lfloor \frac{\beta_j^k + \alpha_j^k}{2} \right\rfloor \quad (3.1)$$

ilə işarə edək.

Tutaq ki,  $|\beta_j^k - \alpha_j^k| \leq 1$  münasibətləri istənilən  $j, (j = \overline{1, n})$  üçün ödənilir, onda  $-1 \leq \beta_j^k - \alpha_j^k \leq 1$  olmalıdır. Burada  $\alpha_j^k$  və  $\beta_j^k$  kəmiyyətlərinin tam olması şərtini nəzərə alsaq aşağıdakı 3 hal mümkündür:

$$\text{I. } \beta_j^k - \alpha_j^k = -1; \quad \text{II. } \beta_j^k - \alpha_j^k = 0; \quad \text{III. } \beta_j^k - \alpha_j^k = 1$$

I.  $\beta_j^k - \alpha_j^k = -1 \rightarrow \beta_j^k = \alpha_j^k - 1$  olar bunu (3.1) münasibətində yerinə yazsaq

$$\theta_j^k = \left\lfloor \frac{\beta_j^k + \alpha_j^k}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\alpha_j^k - 1 + \alpha_j^k}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \alpha_j^k - \frac{1}{2} \right\rfloor = [\alpha_j^k]$$

olar. Çünki  $\theta_j^k \in [\alpha_j^k, \beta_j^k]$ ,  $(j = \overline{1, n})$  olmalıdır.

II.  $\beta_j^k - \alpha_j^k = 0 \rightarrow \beta_j^k = \alpha_j^k$  olar bunu (3.1) münasibətində yerinə yazsaq

$$\theta_j^k = \left\lfloor \frac{\beta_j^k + \alpha_j^k}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\alpha_j^k + \alpha_j^k}{2} \right\rfloor = \lfloor \alpha_j^k \rfloor$$

olar. Çünki  $\theta_j^k \in [\alpha_j^k, \beta_j^k]$ ,  $(j = \overline{1, n})$

III.  $\beta_j^k - \alpha_j^k = 1 \rightarrow \beta_j^k = \alpha_j^k + 1$  olar bunu (3.1) münasibətində yerinə yazsaq

$$\theta_j^k = \left\lfloor \frac{\beta_j^k + \alpha_j^k}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\alpha_j^k + 1 + \alpha_j^k}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \alpha_j^k + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor \alpha_j^k \rfloor$$

olar. Çünki  $\theta_j^k \in [\alpha_j^k, \beta_j^k]$ ,  $(j = \overline{1, n})$ .

Əgər I, II, III hallarında  $\alpha_j^k$ ,  $(j = \overline{1, n})$  ədədlərini  $\beta_j^k$ ,  $(j = \overline{1, n})$  ilə əvəz edib (3.1)-də nəzərə alsaq, bu hallarda  $\theta_j^k = \lfloor \beta_j^k \rfloor$  alırıq.

Beləliklə  $|\beta_j^k - \alpha_j^k| \leq 1$  şərti istənilən  $j$ ,  $(j = \overline{1, n})$  üçün ödənildikdə  $[\alpha_j^k, \beta_j^k]$  intervalının orta nöqtəsi olan  $\theta_j^k$  ya  $\alpha_j^k$  ilə ya da  $\beta_j^k$  ilə üst-üstə düşür. Deməli yeni tapılan həll sonuncu həll ilə üst-üstə düşər. Teorem isbat olundu.

Yuxarıdakı qayda ilə dixotomiya prinsipi ilə funksionala görə zamanətli suboptimal həllin tapılması prosesi o zaman başa çatır ki, isbat etdiyimiz teoremə əsasən  $|\beta_j^k - \alpha_j^k| \leq 1$ ,  $(j = \overline{1, n})$  şərtləri ödənilsin, çünki daha yarıya bölmə prosesi yeni kəmiyyətlər verməyəcək. Başqa sözlə, bu proses elə  $k$ -cı addıma qədər davam olunur ki,  $f^{s,k} < f^s + \Delta^s$  və ya  $f^{s,k} \geq f^s + \Delta^s$  hallarından aslı olmayaraq hər bir  $j$ ,  $(j = \overline{1, n})$  üçün  $|\beta_j^k - \alpha_j^k| \leq 1$  şərti ödənilsin.

Qeyd etmək lazımdır ki, yuxarıdakı qayda ilə hesablama prosesi zamanı hər dəfə  $f^l \geq f^s + \Delta^s$ ,  $1 \leq l \leq k$  olan halladra  $X^z := X^l$  və  $\bar{\delta}_j := \delta_j^l$  ( $j = \overline{1, n}$ ) yadda saxlanılmalıdır.

Beləliklə, nəticədə alınmış  $X^z = (x_1^z, x_2^z, \dots, x_n^z)$  həlli (1.1)-(1.3) məsələsinin funksionala görə zamanətli suboptimal həll olar.

Bu üsulun alqoritmini yazmamışdan əvvəl (1.1)-(1.3) məsələsinin hər hansı suboptimal (təqribi) həllinin tapılması alqoritmini yazaq [11, s.109-115]. Əvvəlcə ümumiliyi pozmadan fərz edək ki, (1.1)-(1.3) məsələsinin əmsalları aşağıdakı qaydada düzülmüşdür:

$$\frac{c_j}{a_j} \geq \frac{c_{j+1}}{a_{j+1}}, \quad (j = \overline{1, n-1}).$$

Onda (1.1)-(1.3) məsələsinin suboptimal həlli aşağıdakı analitik düsturla asanlıqla tapılır: hər bir  $j$ ,  $(j = \overline{1, n})$  üçün

$$x_j^s = \begin{cases} d_j, & \text{əgər } \left( b - \sum_{i=1}^{j-1} a_i x_i^s \right) / a_j > d_j, \\ \left\lfloor \left( b - \sum_{i=1}^{j-1} a_i x_i^s \right) / a_j \right\rfloor, & \text{əgər } \left( b - \sum_{i=1}^{j-1} a_i x_i^s \right) / a_j \leq d_j. \end{cases} \quad (3.2)$$

Burada,  $[z]$  – işarəsi  $z$  ədədinin tam hissəsini göstərir. (1.1) funksiyasının uyğun qiyməti isə

$$f^s = \sum_{j=1}^n c_j x_j^s$$

olar.

Nəhayət, yuxarıda verdiyimiz hesablama prosesinin alqoritmini yazaq.

### ALQORİTM

**Addım 1:**  $n, a_j, c_j, \alpha_j, \beta_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ),  $p$  və  $b$  tam ədədlərini verməli.

**Addım 2:** (1.1)-(1.3) məsələsinin ilkin  $X^s = (x_1^s, x_2^s, \dots, x_n^s)$  suboptimal həllini və uyğun

$$f^s = \sum_{j=1}^n c_j x_j^s$$

qiymətini tapmalı.

**Addım3:**  $\Delta^s = \left[ f^s \frac{p}{100} \right]$  ədədini hesablamaq. Burada  $[z]$  işarəsi  $z$  ədədinin tam hissəsini göstərir.

**Addım 4:**  $\delta_j := \alpha_j$ ,  $c_j' := c_j$  və  $c_j := c_j' + \delta_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) qəbul edək,  $c_j$ -ni (1.1)-(1.3) məsələsində yerinə yazaq.

**Addım 5:** Yeni (1.1)-(1.3) məsələsinin  $\bar{X}^z = (\bar{x}_1^z, \bar{x}_2^z, \dots, \bar{x}_n^z)$  zamanətli həllini və

$$\bar{f}^z = \sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j^z$$

zamanətli qiymətini tapmaq. Əgər  $\beta_j - \alpha_j \leq 1$  ( $j = \overline{1, n}$ ) olarsa **Addım 8-ə keçməli**:

**Addım 6:** Əgər  $\bar{f}^z < f^s + \Delta^s$  olarsa onda  $\alpha_j := \delta_j$ ,  $\delta_j := \left[ \frac{\alpha_j + \beta_j}{2} \right]$ ,  $c_j := c_j' + \delta_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) və **Addım5-ə keçməli**.

**Addım 7:** Əgər  $\bar{f}^z \geq f^s + \Delta^s$  olarsa  $X^z := \bar{X}^z$ ,  $f^s := \bar{f}^z$ ,  $\bar{\delta}_j := \delta_j$ ,  $\beta_j := \delta_j$ ,  $\delta_j := \left[ \frac{\alpha_j + \beta_j}{2} \right]$ ,  $c_j := c_j' + \delta_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) qəbul edib **Addım5-ə keçməli**.

**Addım 8:**  $X^z = (x_1^z, x_2^z, \dots, x_n^z)$  həllini,

$$f^z = \sum_{j=1}^n c_j x_j^z$$

qiymətini,  $f^z - f^s$  artımını,  $\Delta^s$ ,  $f^z - (f^s + \Delta^s)$  ədədlərini çap etməli

**Addım 9:** STOP.

**4. Hesablama eksperimentinin nəticələri:** Bu üsulun tətbiqi ilə aşağıdakı məsələni həll edək.

Bu məsələ [7, s.89] işindən götürülmüşdür, lakin məchullara yeni dəyişmə intervalları vermişik.

$$15x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 20x_4 + 17x_5 + 14x_6 + 6x_7 + 4x_8 + 5x_9 + 2x_{10} \rightarrow \max$$

$$5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 8x_5 + 7x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 4x_9 + 2x_{10} \leq 38$$

$$0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 4, 0 \leq x_3 \leq 2, 0 \leq x_4 \leq 1, 0 \leq x_5 \leq 2, 0 \leq x_6 \leq 3,$$

$$0 \leq x_7 \leq 3, 0 \leq x_8 \leq 4, 0 \leq x_9 \leq 2, 0 \leq x_{10} \leq 7,$$

Bundan sonra, hər növbəti məsələ qurularəkən təkrar etməmək üçün (1.1)-(1.3) və (2.5)-(2.9) məsələlərində qeyd olunduğu kimi bütün məchulların verilmiş intervallarda tam ədədlərlə qiymətlər aldığını nəzərdə tuturuq. Bu məsələnin suboptimal həllini və funksionalın uyğun qiymətini tapmaq:

$$X^{s,0} = (2, 4, 2, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1) \text{ və } f^{s,0} = 94 \text{ olar.}$$

Tutaq ki,  $f^{s,0} = 94$  ədədini ən azı  $p = 10\%$ , yəni  $\Delta^s = 9$  vahid artırmaq lazımdır, yəni  $f^{s,0} + \Delta^s = 94 + 9 = 103$ . Bu zaman alınan yeni məsələ aşağıdakı kimi olacaq:

$$\delta_j \rightarrow \min, \quad (j = \overline{1, 10}), \quad (4.1)$$

$$(15 + \delta_1)x_1 + (8 + \delta_2)x_2 + (12 + \delta_3)x_3 + (20 + \delta_4)x_4 + (17 + \delta_5)x_5 + (14 + \delta_6)x_6 + (6 + \delta_7)x_7 + (4 + \delta_8)x_8 + (5 + \delta_9)x_9 + (2 + \delta_{10})x_{10} \geq f_0^s + \Delta^s = 103, \quad (4.2)$$

$$5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 8x_5 + 7x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 4x_9 + 2x_{10} \leq 38, \quad (4.3)$$

$$x_1 \in [0, 2], x_2 \in [0, 4], x_3 \in [0, 2], x_4 \in [0, 1], x_5 \in [0, 2], x_6 \in [0, 3], x_7 \in [0, 3], x_8 \in [0, 4], x_9 \in [0, 2], x_{10} \in [0, 7], \quad (4.4)$$

$$\delta_1 \in [-3, 5], \delta_2 \in [-2, 6], \delta_3 \in [-1, 5], \delta_4 \in [-4, 0], \delta_5 \in [-3, 1], \delta_6 \in [-2, 9], \delta_7 \in [-3, 7], \delta_8 \in [-1, 0], \delta_9 \in [0, 5], \delta_{10} \in [0, 3], \quad (4.5)$$

Onda  $\delta_j^0$ , ( $j = \overline{1,10}$ ) kəmiyyətləri  $(-3, -2, -1, -4, -3, -2, -3, 1, 0, 0)$  olar. Bu kəmiyyətləri (4.2)-də nəzərə alsaq, onda məsələ belə olar :

$$12x_1 + 6x_2 + 11x_3 + 16x_4 + 14x_5 + 12x_6 + 3x_7 + 3x_8 + 5x_9 + 2x_{10} \rightarrow \max \quad (4.6)$$

$$5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 8x_5 + 7x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 4x_9 + 2x_{10} \leq 38 \quad (4.7)$$

$$x_1 \in [0, 2], x_2 \in [0, 4], x_3 \in [0, 2], x_4 \in [0, 1], x_5 \in [0, 2], x_6 \in [0, 3],$$

$$x_7 \in [0, 3], x_8 \in [0, 4], x_9 \in [0, 2], x_{10} \in [0, 7], \quad (4.8)$$

Alınmış (4.6)-(4.8) məsələsinin əmsalları üçün

$$\frac{c_j}{a_j} = (2,4; 2; 2,2; 1,78; 1,75; 1,71; 0,75; 1; 1,25; 1)$$

(4.6)-(4.8) məsələsinin suboptimal həlli  $X^{s,1} = (2, 4, 2, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$  və cari  $f^{s,1} = 67$  olar. Burada  $f^{s,1} < 103$  olduğundan  $\delta_j^1$ , ( $j = \overline{1,10}$ ) kəmiyyətləri  $(1, 2, 2, -2, -1, 3, 2, -1, 2, 1)$  olar. Onda

$$\delta_1 \in [1, 5], \delta_2 \in [2, 6], \delta_3 \in [2, 5], \delta_4 \in [-2, 0], \delta_5 \in [-1, 1], \delta_6 \in [3, 9],$$

$$\delta_7 \in [2, 7], \delta_8 \in [-1, 0], \delta_9 \in [2, 5], \delta_{10} \in [1, 3], \quad (4.9)$$

alırıq.  $\delta_j^1$  ( $j = \overline{1, n}$ ) kəmiyyətlərinin bu qiymətlərini (4.2)-də nəzərə alsaq, (4.1)-(4.4) məsələsi aşağıdakı kimi olar:

$$16x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 18x_4 + 16x_5 + 17x_6 + 8x_7 + 3x_8 + 7x_9 + 3x_{10} \rightarrow \max \quad (4.10)$$

$$5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 8x_5 + 7x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 4x_9 + 2x_{10} \leq 38, \quad (4.11)$$

$$x_1 \in [0, 2], x_2 \in [0, 4], x_3 \in [0, 2], x_4 \in [0, 1], x_5 \in [0, 2], x_6 \in [0, 3],$$

$$x_7 \in [0, 3], x_8 \in [0, 4], x_9 \in [0, 2], x_{10} \in [0, 7], \quad (4.12)$$

$$\delta_1 \in [1, 5], \delta_2 \in [2, 6], \delta_3 \in [2, 5], \delta_4 \in [-2, 0], \delta_5 \in [-1, 1], \delta_6 \in [3, 9],$$

$$\delta_7 \in [2, 7], \delta_8 \in [-1, 0], \delta_9 \in [2, 5], \delta_{10} \in [1, 3], \quad (4.13)$$

Alınmış (4.10)-(4.13) məsələsinin əmsalları üçün

$$\frac{c_j}{a_j} = (3,2; 3,3; 2,8; 2; 2; 2,42; 2; 1; 1,75; 1,5)$$

olar və (4.10)-(4.13) məsələsinin suboptimal həlli  $X^{s,2} = (2, 4, 2, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$  və cari  $f^{s,2} = 111$  olar. Burada  $f^{s,2} = 111 \geq 103$  olduğundan  $X^z := (2, 4, 2, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$ ,  $f^s := 111$ ,  $\bar{\delta}_j$ , ( $j = \overline{1,10}$ ) kəmiyyətlərini  $(1, 2, 2, -2, -1, 3, 2, -1, 2, 1)$  qeyd edib yadda saxlayırıq. Yeni  $\delta_j^2$ , ( $j = \overline{1,10}$ ) parametrləri üçün (4.9)-dakı intervallardan  $(3, 4, 3, -1, 0, 6, 4, -1, 3, 2)$  qiymətlərini təyin edib, (4.1)-də nəzərə alsaq, (4.1)-(4.4) məsələsi aşağıdakı kimi olar:

$$18x_1 + 12x_2 + 15x_3 + 19x_4 + 17x_5 + 20x_6 + 10x_7 + 3x_8 + 8x_9 + 4x_{10} \rightarrow \max \quad (4.14)$$

$$5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 8x_5 + 7x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 4x_9 + 2x_{10} \leq 38, \quad (4.15)$$

$$x_1 \in [0, 2], x_2 \in [0, 4], x_3 \in [0, 2], x_4 \in [0, 1], x_5 \in [0, 2], x_6 \in [0, 3],$$

$$x_7 \in [0, 3], x_8 \in [0, 4], x_9 \in [0, 2], x_{10} \in [0, 7], \quad (4.16)$$

$$\delta_1 \in [1, 3], \delta_2 \in [2, 4], \delta_3 \in [2, 3], \delta_4 \in [-2, -1], \delta_5 \in [-1, 0], \delta_6 \in [3, 6],$$

$$\delta_7 \in [2, 4], \delta_8 \in [-1, -1], \delta_9 \in [2, 3], \delta_{10} \in [1, 2], \quad (4.17)$$

Alınmış (4.14)-(4.17) məsələsinin əmsalları üçün

$$\frac{c_j}{a_j} = (3,6; 4; 3; 2,11; 2,125; 2,86; 2,5; 1; 2; 2)$$

olar və (4.10)-(4.13) məsələsinin suboptimal həlli  $X^{s,3} = (2, 4, 2, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$  və cari  $f^{s,3} = 128$  olar. Burada  $f^{s,3} = 128 \geq 103$  olduğundan  $X^z := (2, 4, 2, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$ ,  $f^s := 128$ ,  $\bar{\delta}_j$ , ( $j = \overline{1,10}$ ) parametrləri üçün  $(3, 4, 3, -1, 0, 6, 4, -1, 3, 2)$  qeyd edib yadda saxlayırıq. Yeni  $\delta_j^3$ , ( $j = \overline{1,10}$ ) kəmiyyətləri  $(2, 3, 2, -2, -1, 4, 3, -1, 2, 1)$  təyin edib, (4.1)-də nəzərə alsaq (4.1)-(4.4) məsələsi aşağıdakı kimi olar

$$17x_1 + 11x_2 + 14x_3 + 18x_4 + 16x_5 + 18x_6 + 9x_7 + 3x_8 + 7x_9 + 3x_{10} \rightarrow \max \quad (4.18)$$

$$5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 8x_5 + 7x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 4x_9 + 2x_{10} \leq 38, \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} x_1 \in [0, 2], x_2 \in [0, 4], x_3 \in [0, 2], x_4 \in [0, 1], x_5 \in [0, 2], x_6 \in [0, 3], \\ x_7 \in [0, 3], x_8 \in [0, 4], x_9 \in [0, 2], x_{10} \in [0, 7], \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \delta_1 \in [1, 2], \delta_2 \in [2, 2], \delta_3 \in [2, 2], \delta_4 \in [-2, -2], \delta_5 \in [-1, -1], \delta_6 \in [3, 4], \\ \delta_7 \in [2, 3], \delta_8 \in [-1, -1], \delta_9 \in [2, 2], \delta_{10} \in [1, 1], \end{aligned} \quad (4.21)$$

Alınmış (4.18)-(4.21) məsələsinin əmsalları üçün

$$\frac{c_j}{a_j} = (3,4; 3,67; 2,8; 2; 2; 2,57; 2,25; 1; 1,75; 1,5)$$

olar və (4.18)-(4.21) məsələsinin suboptimal həlli  $X^{s,4} = (2, 4, 2, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$  və cari  $f^{s,4} = 118$  olar.

Hesablama prosesinin davam etdirilməsi üçün sonuncu  $[\alpha_j, \beta_j], (j = \overline{1,10})$  intervallarının orta nöqtələrini tapmalıyıq. Bu zaman,  $|\beta_j - \alpha_j| \leq 1 (j = \overline{1,n})$  olduğundan teorem 3.1-in şərtinə görə  $X^{s,4}$  həlli, məsələnin axtarılan funksionala görə zamanətli həlli olar.

Son nəticədə  $\delta_j, (j = \overline{1,10})$  parametrlərinin minimal qiymətləri  $(3, 4, 3, -1, 0, 6, 4, 0, 3, 2)$  və uyğun həll isə  $X^s = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$  olar. Deməli ilkin  $c_j = (15, 8, 12, 20, 17, 14, 6, 4, 5, 2)$  qiymətləri yeni  $c_j = (17, 11, 14, 18, 16, 18, 9, 3, 7, 3)$  qiymətlərinə çevrilməlidir.

**5. Nəticə:** İşdə təklif etdiyimiz üsulun tətbiqi ilə həll etdiyimiz ədədi misal bir daha göstərir ki, məqsəd funksiyasının əmsallarının minimal artırılıb-azaldılması hesabına ilk verilən məsələnin maksimal qiymətini lazım olan qədər artırmağa zamanət verən həll tapmaq olar. Belə həllin tapılması algoritmi isə bu işdə verilmişdir.

## Ədəbiyyat

1. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. М.: Наука, 1969, 368с.
2. Ковалев М.М. Дискретная оптимизация (целочисленное программирование). М. УРСС, 2003, 246с.
3. Емеличев В.А., Комлик В.Н. Метод построения последовательности планов для решения задач дискретной оптимизации. М.: Наука, 1981, 208 с.
4. Martello S., Toth P. Knapsack problems, Algorithm and Computers implementations. John Wiley & Sons, Chichester, 1990, 296 p.
5. Pisinger D. A minimal algorithm for the 0-1 knapsack problem. // J. Operations Research, 1997, V.45, №5, pp.758-767.
6. Велиев Г.П., Мамедов К.Ш. Метод решения задачи о ранце. // ЖВМ и МФ, 1981, №3, с. 605-611.
7. Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование модели вычислительные алгоритмы. М. Физмат лит., 2007, 304 с.
8. Мамедов К.Ш. Исследование по целочисленной оптимизации (методы, алгоритмы и вычислительные эксперименты). Lambert Academic Publishing (Германия), 2012, 276 с.
9. K.Sh. Mamedov, N.N. Mamedov. "Guaranteed Solution and its Finding in the Integer Programming Problems" International Journal of Applied Science and Technology Vol.5, No.4, August 2015, p.46-54.
10. Məmmədov K.Ş., Məmmədov N.N. Bul proqramlaşdırılması məsələsində zamanətli həll anlayışı və onun tapılması. AMEA-nın "Məruzələri", 2012, №6, s.19-26.
11. Мамедов К.Ш., Мамедов Н.Н. Алгоритмы построения гарантированного решения и гарантированного приближенного решения многомерной задачи о ранце. Международный научно-технический журнал «Проблемы Управления и Информатики» 2014, №5, с.30-37.
12. Məmmədov K.Ş., Məmmədov N.N. Çanta məsələsində məqsəd funksiyasına görə zamanətli həll və zamanətli suboptimal həll anlayışı və onun tapılması. AMEA-nın "Məruzələri", 2016, №3, s. 42-49.



**K.Sh. Mamedov, N.N. Mamedov**

**The concept of guaranteed solution and guaranteed suboptimal solution with respect to the functional in the integer knapsack problem and its construction**

*The concept of guaranteed solution and guaranteed suboptimal solution with respect to the functional in the integer knapsack problem is introduced. An algorithm is developed for a minimum change in the coefficients of the objective function, which guarantees finding a solution that ensures that the value of the function is not less than the fixed value. One numerical example was solved with the use of this algorithm.*

**Keywords:** Knapsack problem, suboptimal solution, guaranteed solution, guaranteed suboptimal solution

**УДК 519.852.6**

**К.Ш. Мамедов, Н.Н. Мамедов**

**Метод нахождения гарантированного субоптимального решения по функционалу в целочисленной задаче о ранце**

*Введены понятия гарантированного решения и гарантированного субоптимального решения по функционалу в целочисленной задаче о ранце. Разработан алгоритм минимального изменения коэффициентов целевой функции, который гарантирует нахождение решения, обеспечивающего получение значения функции не меньше, чем фиксированное. С применением этого алгоритма был решен один численный пример.*

**Ключевые слова:** целочисленная задача о ранце, гарантированное решение и гарантированное субоптимальное решение, принцип дихотомии, алгоритм, вычислительные эксперименты

AMEA İdarəetmə Sistemləri İnstitutu

Təqdim olunub 11.01.2018