Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems, Vol. XXXVIII, No.3, 2018
www.icp.az/2018/3-08.pdf

UOT 519.21

E.A. İBAYEV

SEMİMARKOV DOLAŞMA PROSESİNİN ZOLAQDA QALMA MÜDDƏTİNİN PAYLANMASININ LAPLAS ÇEVİRMƏSİ

Mənfi axınlı, müsbət sıçrayışlı semimarkov dolaşma prosesi tədqiq olunmuşdur. Prosesin verilmiş zolaqda qalma müddətinin paylanmasının zamana görə Laplas çevirməsinin aşkar şəkli tapılmışdır.

Açar sözlər: semimarkov dolaşma prosesi, Laplas çevirməsi, təsadüfi kəmiyyət

1. Giriş. Semimarkov dolaşma proseslərini tədqiq etmək üçün faktorizasiya, asimptotik və s. kimi bir sıra metodlar vardır. Bu metodlarla bir sıra alimlər məşğul olmuşdur. Belə ki, [1]-də zolaqda verilmiş təsadüfi dolaşma üçün asimptotik nəticələr alınmışdır. [2]-də gecikdirən və əks etdirən ekrana malik sıçrayışlı semimarkov dolaşma prosesinin erqodik paylanmasının Laplas çevirməsi tapılmışdır. [3] işində markov zənciri ilə verilən iki sərhəddə malik təsadüfi dolaşmanın asimptotik paylanması araşdırılmışdı. Yuxarıda adları çəkilən işlərdə baxılan proseslərin xarakteristikaları üçün dəqiq düsturlar alınmamışdır. Lakin semimarkov dolaşma proseslər sinfini daraltmaqla onların xarakteristikaları üçün dəqiq düsturlar tapmaq mümkündür. Məsələn, [4]-də sıfırda əksetdirən ekrana malik sıçrayışlı semimarkov dolaşma prosesinin paylanmasının Laplas çevirməsi üçün düstur alınmışdır. [5]-də isə müsbət axınlı, mənfi sıçrayışlı semimarkov dolaşma prosesinin zolaqda qalma müddətinin paylanmasının Laplas çevirməsi tapılmışdır. Bu isə praktika üçün əhəmiyyətlidir. Təqdim olunan işdə [4] və [5]-dən fərqli olaraq mənfi axınlı, müsbət sıçrayışlı semimarkov dolaşma prosesinə baxılır.

İşdə məqsəd baxılan prosesin $[0;a]$ zolağında qalma müddətinin paylanmasının Laplas çevirməsini tapmaqdır.

2. Məsələnin qoyuluşu. Tutaq ki, $(\Omega, F, P(\cdot))$ ehtimal fəzasında asılı olmayan, eyni qanunla paylanmış, müsbət $\{\xi_k(\omega), \zeta_k(\omega)\}_{k\geq 1}$ təsadüfü kəmiyyətlər ardıcıllığı verilmişdir.

Aşağıdakı semimarkov dolaşma prosesinə baxaq [6, s.11]:

$$X(t,\omega) = z - t + \sum_{i=0}^{k-1} \zeta_i(\omega), \quad əgər \quad \sum_{i=0}^{k-1} \zeta_i(\omega) \leq t < \sum_{i=1}^{k} \xi_i(\omega),$$

burada $\xi_o(w) = \zeta_o(w) = 0$.

Məqsəd $X(t,\omega)$ prosesinin $[0;a]$ zolağında qalma müddətinin paylanmasının Laplas çevirməsini tapmaqdır.

3. Həll üsulu. Aşağıdakı kimi işarələmə daxil edək:

$$R(t,a,0|z) = P\{\tau > t|z\},$$

$$\tilde{R}(\theta,a,0|z) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} R(t,a,0|z)\, dt.$$

Aydındır ki,

$$R(t,a,0|z) = P\left\{\inf_{0\leq s\leq t} X(s) > 0;\ \sup_{0\leq s\leq t} X(s) < a \mid X(0) = z\right\}$$

Tam ehtimal düsturuna görə

$$R(t,a,0|z) = P\left\{\inf_{0\leq s\leq t} X(s) > 0;\ \sup_{0\leq s\leq t} X(s) < a;\ \xi_1 > t \mid X(0) = z\right\} +$$
$$+P\left\{\inf_{0\leq s\leq t} X(s) > 0;\ \sup_{0\leq s\leq t} X(s) < a;\ \xi_1 < t \mid X(0) = z\right\}.$$

Onda

$$R(t,a,0|z) = P\{z-t>0;\ \xi_1>t\} +$$
$$+\int_{s=0}^{t}\int_{y=0}^{a} P\{\xi_1\in ds;\ z-s>0;\ z-s+\zeta_1<a;\ z-s+\zeta_1\in dy\}\times$$
$$\times P\left\{\inf_{0\le u\le t-s} X(u)>0;\ \sup_{0\le u\le t-u} X(u)<a\ |\ X(0)=y\right\}. \quad (3.1)$$

(3.1) tənliyini sadələşdirib aşağıdakı inteqral tənliyi alırıq:

$$R(t,a,0|z) = P\{z-t>0\}\,P\{\xi_1>t\} + \quad (3.2)$$
$$+\int_{s=0}^{t}\int_{y=0}^{a} P\{\xi_1\in ds\}P\{z-s>0\}\,dy\,P\{z-s-\zeta_1<y\}\,R(t-s;\ a;\ 0|Y),$$

Əgər (3.2) tənliyinin hər iki tərəfinə t-yə görə Laplas çevirməsini tətbiq etsək, onda alarıq

$$\tilde{R}(t,a,0|z) = \int_{t=0}^{z} e^{-\theta t}P\{\xi_1>t\}\,dt +$$
$$+\int_{y=0}^{a}\tilde{R}(\theta,a,0|Y)\int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t}P\{\xi_1\in dt\}\,dyP\{\xi_1<y-z+t\}, \quad (3.3)$$

və ya

$$\tilde{R}(t,a,0|z) = \int_{t=0}^{z} e^{-\theta t}P\{\xi_1>t\}\,dt +$$
$$+\int_{y=0}^{a}\tilde{R}(\theta,a,0|Y)\int_{t=\max(0;z-y)} e^{-\theta t}dP\{\xi_1<t\}\,dy\,P\{\xi_1<y-z+t\}.$$

Müəyyən çevirmələr aparmaqla (3.3) tənliyini aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$\tilde{R}(t,a,0|z) = \int_{t=0}^{z} e^{-\theta t}P\{\xi_1>t\}\,dt +$$
$$+\int_{y=z}^{a}\tilde{R}(\theta,a,0|Y)\int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t}d_tP\{\xi_1<t\}\,dyP\{\xi_1<y-z+t\} +$$
$$+\int_{y=0}^{z}\tilde{R}(\theta,a,0|Y)\int_{t=z-y}^{\infty} e^{-\theta t}d_tP\{\xi_1<t\}\,dyP\{\xi_1<y-z+t\}. \quad (3.4)$$

Alınmış (3.4) inteqral tənliyini ardıcıl yaxınlaşma üsulu ilə həll etmək olar. Lakin alınan nəticələr tətbiq üçün əlverişli deyildir. Ona görə də dolaşma sinfini daraldaraq həllin aşkar şəkilini alarıq.

Əgər ξ_1 və ζ_1 təsadüfi kəmiyyətləri uyğun olaraq μ və λ parametrli eksponensial paylanmaya malikdirsə, yəni

$$P\{\xi_1<t\} = [1-e^{-\mu t}]\,\varepsilon(t),\quad \mu>0,$$
$$P\{\zeta_1<t\} = \left[1-e^{-\lambda t}\right]\varepsilon(t),\quad \lambda>0,$$

burada

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t < 0. \end{cases}$$

Onda (3.4) tənliyi aşağıdakı şəklə düşər:

$$\tilde{R}(t,a,0|z) = \int_{t=0}^{z} e^{-(\mu+\theta)t}\,dt + \lambda\mu e^{\lambda z} \int_{y=z}^{a} e^{-\lambda y}\,\tilde{R}(\theta,a,0|Y) \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda+\mu+\theta)t}\,dt\,dy +$$
$$+\lambda\mu e^{\lambda z} \int_{y=0}^{z} e^{-\lambda y}\,\tilde{R}(\theta,a,0|Y) \int_{t=z-y}^{\infty} e^{-(\lambda+\mu+\theta)t}\,dt\,dy.$$

Yuxarıda tənliyin hər iki tərəfini $e^{-\lambda z}$-ə vurub z-ə görə törəmə alsaq:

$$-\lambda e^{-\lambda z}\,R(\theta,a,0|z) + e^{-\lambda z}\,R'(\theta,a,0|z) = \frac{\lambda e^{-\lambda z}}{(\mu+\theta)}\left[e^{-(\mu+\theta)z} - 1\right] + e^{-(\lambda+\mu+\theta)z} -$$
$$-\lambda\mu e^{-(\lambda+\mu+\theta)z} \int_{y=0}^{z} e^{-(\mu+\theta)y}\,\tilde{R}(\theta,a,0|Y)\,.$$

Sonra alınmış tənliyin hər iki tərəfini $e^{(\lambda+\mu+\theta)z}$-ə vurub və z-ə görə diferensiallayaq. Onda aşağıdakı kimi diferensial tənlik alarıq:

$$\tilde{R}''(\theta,a,0|z) - (\lambda-\mu-\theta)\,R'(\theta,a,0|z) - \lambda\theta\tilde{R}(\theta,a,0|z) = -\lambda. \qquad (3.5)$$

(3.5) tənliyinə uyğun xarakteristik tənlik aşağıdakı kimi diferensial tənlik alarıq:

$$K^2(\theta,a,0) - (\lambda-\mu-\theta)\,K(\theta,a,0) - \lambda\theta = 0$$

xarakteristik tənliyin kökləri isə

$$K_1 = \frac{\lambda-\mu-\theta+\sqrt{(\lambda-\mu-\theta)^2+4\lambda\theta}}{2}\,,\ K_2 = \frac{\lambda-\mu-\theta-\sqrt{(\lambda-\mu-\theta)^2+4\lambda\theta}}{2}.$$

(3.5) tənliyinin ümumi həlli

$$\tilde{R}(\theta,a,0|z) = c_1\,e^{k_1(\theta)\,z} + c_2\,e^{k_2(\theta)\,z} + \tilde{R}_1(\theta,a,0|z)$$

şəklində olur.

Burada $\tilde{R}_1(\theta,a,0|z)$ diferensial tənliyin xüsusi həllidir və aşağıdakı kimi tapılır.

$$\tilde{R}_1(\theta,a,0|z) = e^{k_1(\theta)\,z} \int \frac{-\lambda\,e^{k_1(\theta)\,z}}{(k_2-k_1)\,e^{(k_1+k_2)\,z}}dz +$$
$$+e^{k_2(\theta)\,z} \int \frac{-\lambda\,e^{k_2(\theta)\,z}}{\big(k_2(\theta)-k_1(\theta)\big)\,e^{(k_1+k_2)\,z}}dz.$$

Müəyyən sadələşdirmələr aparıb ümumi həlli aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\tilde{R}(\theta,a,0|z) = c_1\,e^{k_1(\theta)\,z} + c_2\,e^{k_2(\theta)\,z} + \frac{1}{\theta}\,. \qquad (3.6)$$

(3.5) tənliyinə uyğun sərhəd şərtləri aşağıdakı kimidir:

$$\begin{cases} \tilde{R}(\theta,a,0|0) = \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu+\theta} \displaystyle\int_{y=0}^{a} e^{-\lambda y}\,\tilde{R}(\theta,a,0|Y)\,, \\ \tilde{R}'(\theta,a,0|0) = \lambda\,\tilde{R}(\theta,a,0|0) + 1\,. \end{cases} \qquad (3.7)$$

(3.6)-nı (3.7)-də nəzərə alsaq, aşağıdakı tənliklər sistemini alarıq:

$$\begin{cases} \left[1-\dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu+\theta}\,\dfrac{1}{\lambda-K_1(\theta)}\left[1-e^{-[1-k_1(\theta)]}\right]\right]c_1(\theta)+ \\ +\left[1-\dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu+\theta}\,\dfrac{1}{\lambda-K_2(\theta)}\left[1-e^{-[1-k_2(\theta)]}\right]\right]c_2(\theta)=\dfrac{\mu}{(\lambda+\mu+\theta)\theta}\left[1-e^{-\lambda a}\right], \\ [K_1(\theta)-\lambda]c_1(\theta)+[K_2(\theta)-\lambda]c_2(\theta)=\dfrac{\lambda}{\theta}+1\,. \end{cases}$$

Xarakteristik tənlik üçün Viyet teoremini yazsaq

$$K_1+K_2=\lambda-\mu-\theta,$$
$$K_1\cdot K_2=-\lambda\theta,$$
$$[\lambda-K_1]\cdot[\lambda-K_2]=-\lambda\mu$$

alırıq.

Onda yuxarıdakı tənliklər sistemi aşağıdakı şəklə düşər:

$$\begin{cases} \left(\lambda+\theta+K_1(\theta)\right)e^{-[\lambda-k_1]a}c_1(\theta)+\left(\lambda+\theta+K_2(\theta)\right)e^{-[\lambda-k_2]a}c_2(\theta)= \\ =\dfrac{\mu}{\theta}\left[1-e^{-\lambda a}\right]+\dfrac{\lambda+\theta}{\theta}\,, \\ [\lambda-K_1]c_1(\theta)+[\lambda-K_2]c_2(\theta)=-\dfrac{\lambda+\theta}{\theta}\,. \end{cases} \qquad (3.8)$$

(3.8) tənliklər sisteminin həlli

$$c'_1(\theta)=\frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad c'_2(\theta)=\frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

olur.

Burada

$$\Delta=\begin{vmatrix} [\lambda-K_1(\theta)]\,e^{-[\lambda-k_1]a} & [\lambda-K_1]\,e^{-[\lambda-k_2]a} \\ \lambda-k_1 & \lambda-k_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} \dfrac{\mu}{\theta}\left(1-e^{-\lambda a}\right)+\dfrac{\lambda+\theta}{\theta} & [\lambda-K_1]\,e^{-[\lambda-k_2]a} \\ -\dfrac{\lambda+\theta}{\theta} & [\lambda-k_2] \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} [\lambda-K_2]\,e^{-[\lambda-k_2]a} & \dfrac{\mu}{\theta}\left(1-e^{-\lambda a}\right)+\dfrac{\lambda+\theta}{\theta} \\ \lambda-k_1 & -\dfrac{\lambda+\theta}{\theta} \end{vmatrix}$$

Onda (3.5) diferensial tənliyin ümumi həlli aşağıdakı kimi olar

$$\tilde{R}(\theta,a,0|z)=c'_1(\theta)\,e^{k_1(\theta)\,z}+c'_2(\theta)\,e^{k_2(\theta)\,z}+\frac{1}{\theta}.$$

4. Nəticə. Mənfi axınlı, müsbət sıçrayışlı semimarkov dolaşma prosesinin zolaqda qalma müddətinin paylanmasının Laplas çevirməsi üçün aşkar düstur tapılmışdır. Alınan nəticə resursların şərti paylanmasının tapılması üçün ehtiyatların müəyyən zolaqda idarə edilməsi məsələlərində istifadə oluna bilər.

Ədəbiyyat

1. Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В. Некоторые асимптотические результаты для случайных блужданий в полосе // Теория вероятностей и ее применения. 1984, Т. 29, № 4, с.654-668.
2. Selahattin MADEN. The Laplace transform for the ergodic distribution of a semi- Markovian random walk process with reflecting and delaying barriers. //Ordu Univ. J. Sci. Tech., Vol.6, № 2, 2016, pp.243-256.
3. Lotov V.I. On the asymptotics of distributions in two sided boundary problems for random walks defined on a Markov chain // Sib. Adv. Math. (1991). Vol.1, № 3, pp. 26-51.
4. Т.И. Насирова, Э.М. Нейманов, Э.А. Ибаев. Преобразование Лапласа-Стилтьеса распределения процесса полумарковского блуждания с отражающим экраном в нуле. // Проблемы управления и информатики. № 1, 2015. с.97-104.
5. T.I. Nasirova, U.Y. Kerimova, B.G. Shamilova. Mathematica Aeterna, Vol. 4, 2014, №.5, pp.437-444.
6. Насирова Т.И. Процессы полумарковского блуждания. Баку, Элм, 1984, 163 с.

E.A. Ibayev

Laplace transformation of the distribution of the time of the semi-Markov random walk process within a band

The semi-Markov random processes with negative tendency, positive jumps and delaying boundary at zero in is investigated in this paper. The Laplace transformation of the distribution of the time of the semi-Markov random processes within a given band is found.

Keywords: process of semi-Markov random walk, Laplace transformation, random variables

УДК 519.21

Э.А. Ибаев

Преобразование Лапласа распределения времени пребывания процесса полумарковского блуждания в полосе

Исследован процесс полумарковского блуждания с отрицательным сносом, положительными скачками. Найден явный вид преобразования Лапласа по времени распределения длительности времени пребывания процесса в данной полосе.

Ключевые слова: процесс полумарковского блуждания, преобразование Лапласа, случайная величина

AMEA İdarəetmə Sistemləri İnstitutu Təqdim olunub 03.10.2017