

UOT 519.2

N.A. ABDULLAYEVA

DAİRƏ ÜZƏRİNDƏ HƏRƏKƏT EDƏN HİSSƏCİKLƏRİN RİYAZİ MODELƏRİ

Müxtəlif sahələrdə (rabitə, nəqliyyat, kommunikasiya və digər) istifadə olabilən, hərəkətdə olan hissəciklərin riyazi modelləri qurulur və araşdırılır. Bu modellərdə yaranan müxtəlif hərəkət rejimləri tapılır. Yaranmış rejimləri müəyyən etmək üçün xüsusi diaqram təklif olunur. Rejimləri müqayisə etmək üçün effektivlik göstəricisi təklif olunur. Bu effektivlik indeksinə uyğun olaraq optimal hərəkət rejimi müəyyən olunur.

Açar sözlər: hissəciklərin riyazi modelləri, sabit rejim, tam sabit rejim, qarışıq sabit rejim, doymuş sabit rejim, sıfır vəziyyəti, effektivlik indeksi

1. Giriş. Uzunluğu 1-ə bərabər olan dairə üzərində hərəkətdə olan k hissəciklərin riyazi modellərinə baxaq. Dairənin bir nöqtəsində sadəcə bir hissəcik yerləşə bilər və modelin quruluşundan görünəcək ki, hissəciklərin hərəkəti zamanı onlar bir-birini ötə bilməzlər. Müasir zamanda hərəkətdə olan hissəciklərin riyazi modelləri uğurla nəqliyyat, kommunikasiya və d. sahələrdə istifadə olunur. Bu sahədə çox sayda kitab və məqalələr [1-5] dərc olunmuşdur. [6]-da təklif edilən modeldə sadəcə iki hissəcik hərəkət edir: lider (onun hərəkətinə digər hissəcik mane olmur) və hərəkəti liderə olan məsafədən asılı olan digər hissəcik. Hissəciklər bir-birini ötə bilməz və müəyyən məsafə onlar arasında tutulacaq. Bu model [7, 8]-də ümumiləşdirərək çox sayda hərəkətdə olan hissəciklərin riyazi modelləri kimi təklif olunmuşdur və [6]-da alınan nəticələrin belə modellər üçün doğru olması göstərilmişdir. Dairə üzərində hərəkət edən hissəciklərin modelləri [9, 10]-da təklif olunmuşdur və [6, 7]-də alınan nəticələr bu modellər üçün ümumiləşdirilmişdir. Çap olunmuş [11, 12] məqalələrində, aşağıda təklif olunan riyazi modellərdə hissəciklərin hərəkətləri aralarında olan məsafədən asılıdır, amma [6, 7]-dən fərqli olaraq hər bir hissəcik ya V_1 sürəti, ya da V_2 sürəti ilə hərəkət edə bilər, $V_1 < V_2$. Belə modellər nəqliyyatda, kommunikasiya sistemlərində, biologiyada (impulsların ötürülməsi) və digər sistemlərdə baş verən prosesləri ifadə edir.

2. Riyazi modellərin qurulması. Riyazi modelləri qurmaq üçün işarələmələri daxil edək:

$\xi_{i,t}$ - t anında i -ci hissəciyin koordinatıdır. Dairənin hər bir nöqtəsini 0-dan 1-ə qədər işarəliyək. O zaman hissəciyin koordinatı yerləşdiyi nöqtə deməkdir, yəni hissəciyin koordinatı $[0,1]$ intervalından qiymətlər alır $\xi_{i,t} \in [0,1]$.

$V_{i,t}$ - t anında i -ci hissəciyinin sürətidir;

$\rho_{i,t} = \xi_{i+1,t} - \xi_{i,t}$ - i -ci və $(i+1)$ -ci hissəciklərinin arasındakı məsafədir (hərəkət istiqamətində) və aşağıdakı kimi müəyyən olunur:

$$\rho_{i,t} = \xi_{i+1,t} - \xi_{i,t}, \quad \text{əgər } \xi_{i+1,t} > \xi_{i,t} \quad \text{və}$$

$$\rho_{i,t} = n - (\xi_{i,t} - \xi_{i+1,t}), \quad \text{əgər } \xi_{i+1,t} < \xi_{i,t}, \quad i=1,2,\dots,k-1;$$

$$\rho_{k,t} = \xi_{1,t} - \xi_{k,t}, \quad \text{əgər } \xi_{1,t} > \xi_{k,t} \quad \text{və}$$

$$\rho_{k,t} = n - (\xi_{k,t} - \xi_{1,t}), \quad \text{əgər } \xi_{1,t} < \xi_{k,t}$$

; γ Hissəciklərin sürətlərini müəyyən etmək üçün aşağıda təklif olunan Q_1 və Q_2 parametrlərini daxil edək. Modelin qurulmasından aydındır ki $0 < Q_1 < Q_2 < 1$. Burada Q_1 qiyməti hissəciklərin bir-birinə nə qədər yaxın yanaşa bilməsini ifadə edir və praktiki məsləhətlərdə hər bir hal üçün ayrıca daxil olunur. Q_2 elə məsafədir ki, bu məsafədən başlayaraq hissəcik yüksək sürətlə hərəkət edə bilər. Əgər hissəciklər arasındakı məsafə Q_1 olarsa, o zaman hissəciyin sürəti V_1 olmalıdır. Əgər məsafə Q_2 -yə bərabər, ya ondan böyük olarsa, o zaman hissəciyin sürəti məcburi V_2 olmalıdır.

Əgər $\rho_{i,t} = Q_1$ və $\rho_{i,t}$ məsafəsi artırsa (bu, i -ci hissəciyin sürəti V_1 olduqda və $(i+1)$ -ci hissəciyin sürəti V_2 olduqda baş verə bilər), onda $\rho_{i,t^*} = Q_2$ olduqda t^* anında i -ci hissəciyin sürəti V_1 -dən V_2 -yə dəyişir.

Əgər $\rho_{i,t}=Q_2$ və $\rho_{i,t}$ məsafəsi azalırsa (bu, i -ci hissəciyinin sürəti V_2 olduqda və $(i+1)$ -ci hissəciyinin sürəti V_1 olduqda baş verə bilər), onda $\rho_{i,t^{**}}=Q_1$ olduqda t^{**} anında i -ci hissəciyi sürəti V_2 -dən V_1 -ə dəyişir. Beləliklə, hissəciklər arasındakı məsafə Q_1 və ya Q_2 -yə bərabər olduqda, hissəciklər sürətlərini dəyişir, yəni sürət yalnız $[Q_1, Q_2]$ intervalının sərhədlərində dəyişir. Deməli, hissəciklər arasındakı məsafə qiyməti (Q_1, Q_2) intervalından götürülsə, onda hissəcik öz sürətini dəyişməyəcək və ya V_1 sürətini, ya da V_2 sürətini saxlayacaq.

Tərif 2.1. Əgər hər hansı t anı üçün $(k-1)$ sayda hissəciklər arasında məsafələr Q_1 -ə bərabər olarsa, onda bu vəziyyət **sıfır vəziyyəti** adlandırılır.

3. Determenik modellər və yarana bilən vəziyyətlər. Öncə determenik modelləri quraq, sonra isə stoxastik modellərə baxılacaq. Bütün modellər üçün fərz olunur ki, hərəkət sıfır vəziyyətindən başlayır, yəni $t=0$ anı üçün aşağıdakı şərtlər doğrudur:

$$\rho_{1,t} = Q_1, \rho_{2,t} = Q_1, \dots, \rho_{k-1,t} = Q_1 \quad V_{k-1,t} = Q_1$$

və sonuncu hissəciyinin sürəti $V_{k,t}$ bu hissəcik və birinci hissəcik arasında olan məsafə $\rho_{i,t}$ asılıdır.

Tərif 3.1. Əgər hər hansı t üçün, bütün hissəciklərin sürəti V_1 ($V_{i,t} = V_1, i=1,2,\dots,k$) olarsa, onda bu hərəkət rejimi k hissəcikli **Sabit Rejim 1** adlanır, və **sr1(k)** kimi işarələnir.

Əgər sistem sıfır vəziyyətindən hərəkətə başlayırsa, və bütün hissəciklər V_1 ($V_{i,t^*}=V_1, i=1,2,\dots,k$) sürəti ilə hərəkət etdiyi t^* anı mövcuddursa, onda istənilən $t>t^*$ üçün $V_{i,t}=V_1, i=1,2,\dots,k$ və sistem **sr1(k)** rejimində hərəkət edəcək.

Qeyd 3.1. Verilmiş Q_1 və Q_2 üçün **sr1(.)** hərəkət rejimi hər zaman mövcud deyil. Məsələn, əgər $(k-1)Q_1+Q_2=1$ tənliyini ödəyir, və $2Q_1>Q_2$ onda belə k üçün **sr1(k)** rejimi mövcud deyil, çünki elə iki hissəcik mövcuddur ki, aralarındakı məsafə Q_2 -dən böyükdür.

Qeyd 3.2. Verilmiş Q_1 və Q_2 üçün müxtəlif sayda hissəcikləri olan bir neçə **sr1(.)** hərəkət rejimi mövcud ola bilər.

Misal 3.1. $Q_1=1/30; Q_2=1/10; k_1=30$; deməli, **sr1(30)** mövcuddur. Hesab edək ki, $k_2 = 29$; onda elə t mövcuddur ki, onun üçün $\rho_{1,t}=1/30, V_{1,t}=V_1; \rho_{2,t}=1/30, V_{2,t} = V_1, \dots, \rho_{28,t} = 1/30, V_{28,t}=V_1; Q_1 = 1/30 < \rho_{29,t} = 2/30 < Q_2 = 1/10, V_{29,t} = V_1$;

Tərif 3.2. Mümkün olan maksimal sayda hissəciklərlə **sr1(.)** hərəkət rejimi **Tam Sabit Rejim 1** adlanır və **tsr1(.)** ilə işarələnir.

Teorem 3.1. Verilmiş Q_1 və Q_2 üçün, **sıfır vəziyyətindən** başlayaraq, **tsr1** hərəkət rejiminin mövcud olması üçün

$$1-\min(Q_2-Q_1, Q_1) < kQ_1 \leq l \quad (3.1)$$

və ya ekvivalent forması

$$1-\min[(Q_2, 2Q_1)-Q_1] < kQ_1 \leq l \quad (3.2)$$

şerti zəruri və kafidir və belə təyin olunan hissəciklərin sayı k yeganədir.

İsbati. Zərurilik. Əgər sistem sıfır vəziyyətindən hərəkətə başlayırsa, və hər hansı **tsr1(k)** hərəkət rejiminə çatırsa, onda $(k-1)$ sayda hissəciklərin arasındakı məsafələr dəqiq Q_1 -ə bərabər olur və sonucu hissəcikdən birinciyə olan məsafə $2Q_1$ -dən az, lakin Q_1 -dən çox ya bərabər olmalıdır, çünki əks halda **tsr1(.)** olmayacaq. Bu o deməkdir ki, $(k-1)$ hissəcik arasında olan məsafə Q_1 -ə bərabərdir, sonuncu və birinci hissəciklər arasında olan məsafə Q_1 -dən böyük, amma Q_2 -dən kiçikdir. Deməli,

$$kQ_1 \leq l, (k-1)Q_1+2Q_1 > 1 \quad \text{və} \quad (k-1)Q_1+Q_2 > 1 \quad (3.3)$$

yanı (3.1) şərti doğrudur.

Kafilik. Əgər sistem **sıfır vəziyyətindən** hərəkətə başlayır və (3.1) şərti doğrudursa, onda sistem ancaq **tsr1** rejimində hərəkət etməyə məcburdur, çünki $(k-1)$ hissəciyi arasındakı məsafələr Q_1 -ə bərabər olacaq və onların sürəti modelin quruluşuna uyğun olaraq V_1 olacaq, yəni $V_{i,t}=V_1, i=1,2,\dots,k-1$. Son və birinci hissəciklər arasında məsafə Q_1 -dən böyük ya bərabər, amma Q_2 -dən kiçik olacaq. Son hissəcik bir müddət V_2 sürəti ilə hərəkət etsə də, müəyyən müddətdən sonra onlar arasındakı məsafə Q_1 -ə bərabər olub, onun sürəti V_2 -dən V_1 dəyişəcək, yəni elə t^* anı olacaq ki, $V_{k,t^*}=V_1$. Belə müddət zamanı digər hissəciklər arasında məsafələr dəyişsə, belə şərt (3.1)-ə uyğun olaraq Q_2 -dən

kiçik olaraq qalacaq. Onda modelin quruluşuna uyğun olaraq $V_{i,t^*} = V_1$, $i=1,2,\dots,k-1$. Bu da o deməkdir ki, sistem $tsr(k)$ rejimində hərəkət edəcək.

(3.1) və ya (3.2) şərtindən irəli gəlir ki, bu tənlikləri ödəyən k yeganədir.

Qeyd 3.3. Eyni zamanda (3.1) şərtindən irəli gəlir ki, hissəciklərin sayı artırılı bilməz, çünki əks halda sistemin $tsr1$ rejimində hərəkəti qeyri-mümkün olardı.

Beləliklə, (3.1) şərtindən çıxır ki, sistem $tsr1(.)$ rejimində hərəkət edir və verilmiş Q_1 və Q_2 üçün hissəciklərin sayı aşağıdakı tənliklə müəyyən olunur:

$$k = \{ \max: \text{bütöv rəqəm } s: \max(1-Q_2+Q_1, 1-Q_1 < sQ_1 \leq l) \} \quad (3.4)$$

Əgər $Q_2 > 2Q_1$, onda $1-(Q_2-Q_1) < kQ_1 \leq l$ və əgər $Q_2 \leq 2Q_1$, onda $(1-Q_1) < kQ_1 \leq l$.

Tərif 3.3. Bütün k hissəciklərin V_2 ($V_{i,t} = V_2$, $i=1,2,\dots,k$) sürətinə malik olduğu hərəkət rejimi **Sabit Rejim2** adlanır və **sr2(k)** ilə işarələnir.

Əgər sistem sıfır vəziyyətindən hərəkətə başlayırsa və bütün hissəciklərin V_2 sürətinə malik olduğu hər hansı t^* anı mövcuddursa, yəni ($V_{i,t^*} = V_2$, $i=1,2,\dots,k$) onda istənilən $t > t^*$ üçün, $V_{i,t} = V_2$, $i=1,2,\dots,k$; və sistem **sr2(.)** hərəkət rejimində fəaliyyət göstərir.

Ayındır ki, verilmiş Q_1 və Q_2 üçün müxtəlif sayda hissəcikləri olan bir neçə **sr2(.)** hərəkət rejimləri mövcud ola bilər.

Misal 3.2. $Q_1 = 1/30$; $Q_2 = 1/10$; $k_1 = 10$; deməli, **esr2(10)** hərəkət rejimi mövcuddur. Hesab edək ki, $k_2 = 5$ və elə t mövcuddur ki, onun üçün

$$\rho_{1,t} = 1/10, V_{1,t} = V_2; \rho_{2,t} = 1/10, V_{2,t} = V_2, \dots, \rho_{4,t} = 1/10, V_{4,t} = V_1; \rho_{5,t} = 6/10 > Q_2, V_{5,t} = V_2.$$

Beləliklə, bu modeldə müxtəlif sayda $k_1 = 10$ və $k_2 = 5$ hissəciklərinə malik olan iki **esr2** hərəkət rejimi mövcuddur.

Tərif 3.4. Maksimal sayda hissəciklərə malik olan **sr2(.)** hərəkət rejimi **Tam Sabit Rejim 2** adlandırılır və **tsr2(.)** ilə işarə olunur.

Sistemdə hər bir hissəcik öz sürətini yalnız məsafədən asılı olaraq dəyişə bilər onda modelin quruluşundan aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 3.2. Sıfır rejimindən hərəkətə başlayan sistemin (**tsr2**) hərəkət rejimində fəaliyyət göstərməsi üçün aşağıdakı şərt zəruri və kafidir:

$$0 < kQ_2 \leq 1, \quad (k+1)Q_2 > 1$$

Hissəciklər arasında bütün məsafələr, birindən başqa, Q_2 -yə bərabər olmalıdır və onlardan yalnız biri üçün (məsələn, k -cı və birinci hissəcik arasında) olan məsafə $Q_1 < \rho_{k,t} < 2Q_1 < Q_2$ saxlanılmalıdır

İsbati. Zərurilik. Əgər sistem sıfır rejimindən hərəkətə başlayırsa, və hər hansı bir t anında (**tsr2**) rejiminə çatırsa, o zaman hissəciklər arasındakı məsafələr birindən başqa (məsələn k -cı və birinci hissəciklər arasında) Q_2 -yə bərabərdir. Nəzərə alsaq ki, hər bir hissəcik sürətini ancaq məsafə Q_1 ya Q_2 -yə bərabər olanda dəyişirsə, o zaman k -cı və birinci hissəciklər arasındakı məsafə Q_1 -dən böyükdür. Nəzərə alsaq ki, (**tsr2**) rejimi elə bir rejimdir ki, sistemdə maksimal sayda hissəcik var və hər birinin sürəti V_2 -yə bərabərdir, o zaman teorem 3.2-nin şərti doğru olmalıdır, çünki əks halda (**tsr2**) rejimi mövcud deyil.

Kafilik. Əgər teorem 3.2-nin şərti doğrudursa, o zaman $(k-1)$ hissəcik arasındakı məsafələr Q_2 -yə bərabər olduğundan bu hissəciklərin sürəti V_2 -yə bərabərdir. Sistem sıfır vəziyyətindən hərəkətə başladığı üçün k -cı hissəciyin sürəti $t=0$ anında V_2 -yə bərabərdir, yəni $V_{k,0} = V_2$. Son hissəcik və birinci hissəcik arasındakı məsafə teorem 3.2-nin şərtinə uyğun olaraq Q_1 -dən böyük olduğundan çıxır ki, istənilən t üçün $V_{k,t} = V_2$. Deməli, sistem (**tsr2**) rejimində hərəkət edir.

Qeyd 3.4. Teorem 3.2-nin şərti aşağıdakı şərtədən çıxır ki, (**tsr2**) hərəkət rejimi mövcud olsa, hissəciklərin sayı k aşağıdakı şərti ödəyər: $0 < kQ_2 \leq 1$, $kQ_2 + Q_1 > 1$. Burdan çıxır ki,

$$1 - Q_1 < kQ_2 \leq 1$$

Qeyd 3.5. Əgər verilmiş Q_1 və Q_2 üçün elə bir k mövcuddur ki, sistem (**tsr2**) hərəkət rejimində işləyir, onda istənilən $k^* < k$ üçün sistem (**tsr2**) hərəkət rejimində işləyəcək.

Əgər bizi mümkün olan maksimal sayda hissəcikləri olan (*tsr2*) hərəkət rejimi maraqlandırarsa, onda verilmiş Q_1 və Q_2 üçün (k) hissəciklərinin sayı belə müəyyən edilir:

$k = \{ \max \text{ bütöv } s: sQ_2 \leq l \}$ (*tsr2*) hərəkət rejiminə digər misal aşağıda verilir:

$$\rho_{1,t} = n_1 Q_2, V_{1,t} = V_2; \rho_{2,t} = n_2 Q_2, V_{2,t} = V_2; \dots, \rho_{k-1,t} = n_{k-1} Q_2, V_{k-1,t} = V_2; \\ \rho_{k,t} = n_k Q_2, V_{k,t} = V_2; n_i > 1, i = 1, 2, \dots, k.$$

Lakin bu cür hərəkət rejimlərə sıfır vəziyyətdən çatmaq mümkün deyil və biz yalnız sıfır vəziyyətindən çatmaq mümkün olan hərəkət rejimlərini nəzərdən keçirəcəyik. (3.1) və (3.2) düsturlarından çıxır ki,

$$k = \{ \max \text{ bütöv } s \max(1 - Q_2, 1 + Q_2 - Q_1), sQ_2 \leq 1 \} \quad (3.5)$$

Əgər Q_2 verilibsə, onda (3.5) (*tsr2*) üçün nadir k müəyyən edir. Başqa sözlə, biz (3.5) şərtini ödəyən mümkün olan maksimal sayda hissəcikləri olan (*tsr2*) nəzərdən keçirəcəyik.

Qeyd 3.6. Qeyd etmək lazımdır ki, (*tsr1*) və (*tsr2*) hərəkət rejimləri üçün (k) hissəciklərin sayı müxtəlifdir, və bundan əlavə

$$k_{(tsr1)} > k_{(tsr2)} \quad (3.6)$$

yəni (*tsr1*) rejimində hissəciklərin sayı hər zaman (*tsr2*) rejimində olan saydan azdır.

İsbati. Bu fakt ondan irəli gəlir ki, (*tsr1*) rejiminin mövcud olunması üçün hissəciklərin sayı k_1 teorem 3.1-ə görə (3.1) və ya (3.2) şərtləri ödənməlidir. (*tsr2*) rejimin isə mövcud olması üçün teorem 3.2-nin şərti ödənməlidir. Bu şərtlərdən asanlıqla (3.6) çıxır.

Tərif 3.5. Bəzi hissəciklərin V_1 ($V_{i,t} = V_2, i = 1, 2, \dots, k_1$) və digərlərinin V_2 ($V_{j,t} = V_2, j = k_1, k_1 + 1, \dots, k$) sürətinə malik olduğu hərəkət rejimi **Qarışıq Sabit Rejim**, (*qsr*) adlanır və $M(k_1, k_2)$ ilə işarə edilir.

Qeyd 3.7. k_1 və k_2 əmsalları (*qsr*) rejimində V_1 və V_2 sürətləri ilə hərəkət edən hissəciklərin sayını ifadə edirlər.

Əgər sistem (*qsr*) $M(k_1, k_2)$ rejimində işləyirsə, onda bəzi müddət $o M(k_1, k_2)$ -də, bəzi müddət isə $M(k_1 - 1, k_2 + 1)$ -də işləyir və bəzi vaxtlar $M(k_1 + 1, k_2 - 1)$, lakin $k_1 + k_2 = k$. Daha sonra sistem üçün verilmiş, sıfır vəziyyətindən başlayan k , Q_1 və Q_2 üçün k_1 və k_2 -ni tapmağa imkan verən diaqram veriləcək.

İsbati. $M(k_1, k_2)$ hərəkət rejimində $k = k_1 + k_2$ hissəciklər sayını və $M(k_1^*, k_2^*)$ rejimində $k^* = k_1^* + k_2^*$ hissəciklər sayını ifadə edir.

Aydındır ki, $k^* < k$ və $k_1^* < k_1$, çünki $k_1^* = \max\{s: sQ_1 \leq (1 - k_2^*Q_2)\}$, $k_1 = \max\{s: sQ_1 \leq (1 - k_2Q_2)\}$ və $(1 - k_2^*Q_2) < (1 - k_2Q_2)$.

Fərz edək ki, $k_1^* = k_1 - m_1$ və $k_2^* = k_2 + m_2$.

Onda

$$m_2 Q_2 \leq m_1 Q_1 \quad (3.7)$$

Aşağıda verilmiş k , Q_1 və Q_2 üçün hərəkət rejimini tapmağa imkan verən diaqram verilmişdir. Nəzərə alaq ki, diaqramda $k_1 = k - k_2$. Diaqramda x oxu Q_1 qiymətlərinə və y oxu Q_2 qiymətlərinə uyğun gəlir. $Q_1 < Q_2$ olduğuna görə, deməli, bizim üçün diaqramın yalnız $y = x$ qrafikindən yuxarıda yerləşən hissəsi maraqlıdır.

Əgər hissəciklərin sayı S verilibsə, o zaman nöqtə (Q_1, Q_2) yerləşdiyi əraziyə baxaq. $y = x$ və $y = (1 - x)/(s - 1)$ düz xətlərinə baxaq. Əgər (Q_1, Q_2) nöqtəsi düz xətlər $y = x$ və $y = (1 - x)/(s - 1)$ arasında yerləşən üçbucağın daxilində yerləşirsə, onda sistem (*tsr1*) hərəkət rejimində işləyir.

Əgər k verilibsə və nöqtə (Q_1, Q_2) ,

$$y = x, y = 1 - x \text{ və } y = -kx + 1$$

düz xətləri arasında yerləşirsə, onda sistem (*tsr2*) hərəkət rejimində işləyir. Əgər k və (Q_1, Q_2) nöqtəsi verilibsə, o zaman $y = -(k - k_2)x/k_2 + 1/k_2$, $y = -(k - k_2 + 1)x/(k_2 - 1) + 1/(k_2 - 1)$ xətləri və y oxu arasında yerləşirsə, onda sistem (*qsr*) hərəkət rejimində işləyir, $M(k_1, k_2)$ hərəkət rejimində işləyir. Beləliklə, verilmiş k , Q_1 və Q_2 üçün diaqram sistemin sıfır vəziyyətdən başlayaraq hansı hərəkət rejimində fəaliyyət göstərməsini müəyyən etməyə imkan verir. (Q_1, Q_2) nöqtəsinin yalnız $Q_1 = Q_2$ qrafikinə

yuxarısında yerləşə biləcəyini göstərin, çünki fərz edilir ki, $Q_1 < Q_2 < 1$. Verilmiş Q_1 və Q_2 qiymətləri üçün diaqramdan istifadə edərək biz aşağıdakı yolla sistemin hərəkət rejimini müəyyən edə bilərik.

Əgər nöqtə (Q_1, Q_2) $(k_1 Q_1 + k_2 Q_2 = 1)$ və $(k_1 - 1)Q_1 + k_2 + 1)Q_2 = 1)$ xətləri arasında yerləşirsə, onda biz belə bir nəticəyə gələ bilərik ki, sistem, onun

$$(1 - (k_1 Q_1 + k_2 Q_2)) / (V_2 - V_1) \quad (3.8)$$

vaxt intervalı zamanı $M(k_1, k_2)$ vəziyyətində işlədiyi və

$$(Q_2 - Q_1) / (V_2 - V_1) \quad (3.9)$$

vaxtında $M(k_1 - 1, k_2 + 1)$ vəziyyətində işlədiyi $M(k_1, k_2)$ qarışıq rejimində işləyir.

(3.8) və (3.9) düsturları aşağıdakı izahdan irəli gəlir.

$$Q_1 < (1 - (k_1 Q_1 + k_2 Q_2)) < Q_2$$

hissəciklərin arasındakı məsafəyə uyğun olaraq, hissəciyin biri V_2 sürətinə və digəri V_1 sürətinə malik olduğuna görə, $(V_2 - V_1)$ sürəti ilə dəyişdiyinə görə, sürətin V_2 -dən V_1 -ə dəyişməsi üçün $(1 - (k_1 Q_1 + k_2 Q_2)) / (V_2 - V_1)$ vaxtı lazımdır. Eynilə, sürətin V_1 -dən V_2 -yə dəyişməsi üçün $(Q_2 - Q_1) / (V_2 - V_1)$ vaxt lazımdır.

Tərif 3.6. Mümkün olan maksimal sayda hissəciklərə malik olan, hər bir hissəcik V_2 sürəti ilə hərəkət edən və eyni zamanda aralarındakı məsafələr minimal olan hərəkət rejimi (yəni $\rho_{i,t} = Q_1 + \varepsilon_i$, $\varepsilon_i > 0$ kiçik qiymət alır) **Doymuş Sabit Rejim (dsr)** adlanır. k hissəciklərin sayının maksimal olduğu fərz edildiyinə görə, onda belə çıxır ki,

$$Q_1 < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_k < Q_2 \quad (3.10)$$

Çünki əks halda sistemdə bizim $(k+1)$ hissəciklərimiz ola bilər, lakin bu sistemin k hissəcikləri ilə (dsr)-də işlədiyi fərziyyəsinə ziddir. Doymuş rejimlər ilk baxışdan çox cəlb edicidirlər, çünki tələblərin gözləmə müddəti belə rejimlərdə mümkün olan aşağı qiymətini alır. Amma doymuş rejimlər stabil deyil, çünki sistemlərdə yaranan hansı bir maneə bu hərəkət rejimini dəyişir, sistem digər hərəkət rejiminə keçir və bu hərəkət rejimində tələblərin gözləmə müddəti artır.

Teorem 3.3 Sistemin *Doymuş Sabit Rejimində hərəkəti* üçün aşağıdakı şərtlər zəruri və kafidir:

$$kQ_1 < 1 \text{ və } kQ_2 > 1 \quad (3.11)$$

İsbat. Zərurilik. Fərz edək ki, sistem (dsr) rejimində hərəkət edir. O zaman tərif 3.7-yə uyğun olaraq hissəciklər arasında olan hər bir məsafə Q_1 -dən böyük olduğundan çıxır ki,

$$k_{(tsr1)} Q_1 < 1 \quad (3.12)$$

Digər tərəfdən sistem (dsr) rejimində hərəkət etdiyindən çıxır ki, hissəciklərin sayı (tsr2) rejimində olan hissəciklərin sayından çoxdur, yəni

$$k_{(dsr)} > k_{(tsr2)} \quad (3.13)$$

Teorem 3.1-ə uyğun olaraq (tsr2) üçün aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$k_{(tsr2)} Q_2 > 1 \quad (3.14)$$

Ona görə (3.14) bərabərsizliyi (3.12) və (3.13) bərabərsizliklərindən asanlıqla çıxır.

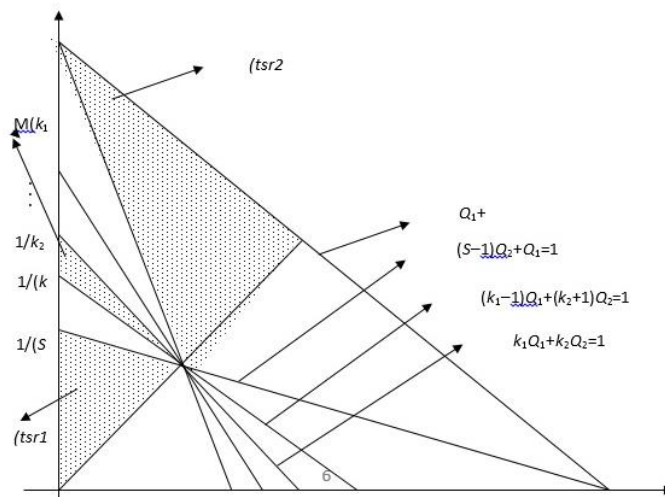
Kafilik. Əgər (3.11) doğrudursa, o zaman hissəciklər arasındakı məsafələrin hər biri Q_1 -dən böyük olduğundan hər bir hissəcik üçün alırıq:

$$\rho_{i,t} = Q_1 + \varepsilon_i, \quad V_{1,t} = V_2$$

Eyni zamanda alırıq ki, (3.11) şərtini ödəyən hissəciklərin sayını dairədə artırmaq mümkün deyil. Demək ki, sistem (dsr) rejimində hərəkət edir. Yuxarıda sözü gedən sistemlərdə yarana bilən vəziyyətləri ifadə etmək üçün diaqram qurmaq mümkündür. Belə diaqram sistemin hərəkəti sıfır vəziyyətdən başlayan vəziyyətlərə aiddir. Yuxarıda isbat olunmuş teoremlər (Teorem 3.1, 3.2 və 3.3) vəziyyətlərin yaranmasını zəruri və kafi şərtlərini ifadə edir.

Verilmiş Q_1, Q_2 və s üçün sistemin stasionar halda hansı sabit vəziyyətdə hərəkət etməsini müəyyən etmək mümkündür. Bunun üçün müəyyən diaqram qurmaq mümkündür. Belə diaqram Şək. 3.1 təqdim olunur. Stabil vəziyyəti müəyyən etmək üçün verilmiş s üçün (Q_1, Q_2) nöqtəsinin koordinatlarının diaqramın hansı bölümündə olmasına baxmaq lazımdır. Hər bir sabit rejim üçün

müəyyən sahə diaqramda göstərilir. Verilmiş (Q_1, Q_2) nöqtəsinin bu bölgələrdən hansında yerləşməsi sabit hərəkət rejimlərini $((tsr1), (tsr2))$ və (qsr) müəyyən edir (Şək.1).



Şək.1. Yaranmış rejimləri müəyyən etmək üçün xüsusi diagram

Qeyd 3.8. Fərz edək ki, $Q_1=1/20$, $Q_2=1/10$, $V_1=1/4$, $V_2=1$. Sistem hərəkətə 2 hissəciklə başlayır və bundan sonra hissəciklərin sayı getdikcə artır. Modellərin quruluşuna uyğun olaraq, sayı 2 hissəcikdən başlayaraq və sayı 10 hissəciyə qədər olan sistem (*tsr2*) rejimində hərəkət edəcək (Şəx. 1.2.4, (*tsr2*) ilə işarət olunan bölgə). Sistemdə 11 hissəcik olarkən sistem artıq (*qsr*) keçəcək və tam 20 hissəciyə qədər qarışıq rejimdə hərəkət edəcək. Qarışıq rejimdə sistem hərəkət edərək hissəciklərin sayı artdıqca yuxarıda deyildiyi kimi (Q_1 , Q_2) nöqtəsi yerini dəyişərək düz xətləri $(k_1-1)Q_1+(k_2+1)Q_2=1$ və $k_1Q_1+k_2Q_2=1$ arasında özünə yer alacaq. Hissəciklərin sayından asılı olaraq hərəkət rejimləri dəyişir və yaranmış hərəkət rejimlərində sistemin seçilmiş effektivlik indeksinin dəyişməsi aşağıda göstərilir:

$S = 2, (sr2), ogm = 1/2; S = 3, (sr2), ogm = 1/6, S = 4, (sr2), ogm = 1/8,$
 $S = 5, (sr2), ogm = 1/10, \dots, S = 9, (sr2), ogm = 1/18, S = 10, (sr2), ogm = 1/20;$
 $S = 11, qsr(9,2), ogm = 11/200; S = 12, qsr(8,4), ogm = 12/200;$
 $S = 13, qsr(7,6), ogm = 13/200; \dots, S = 19, qsr(1,18), ogm = 19/200;$
 $S = 20, (sr1), ogm = 20/200 = 1/10;$

Yuxarıda göstərilir ki, ($sr1$) rejimində 20 hissəcik hərəkət edir. Doymuş sabit rejiminə baxaq. Bu misalda 20 hissəcik üçün doymuş rejimin yaranması mümkün deyil. Fərz edək ki, dairə üzərində 19 hissəcik hərəkət edir və çalışaq bu sayda hərəkət edən hissəciklər üçün doymuş hərəkət rejimini yaradaq. Hissəciklər arasında olan məsafələri eyni olaraq $1/19$ bərabər edək. Aydınır ki, bu məsafə Q_1 -dən böyük olduğundan ($Q_1=1/20 < 1/19$) məcburi olaraq hissəciklərin sürətini V_2 bərabər edəcəyik. Bunu etmək modelin quruluşu imkan verir. O zaman alırıq $S=19$, (d_{sr}), $o_{qm}=1/38$.

Yuxarıda verilmiş ədədi misaldan görünür ki, determenik rejimləri üçün (*dsr*) rejimi orta hissəciyin dairənin seçilmiş nöqtəsində gözləmə baxımından ən əlverişli rejimdir (kütləvi xidmət sistemlərində bu parametrlər tələblərin xidmətə qədər orta gözləmə müddətinə uyğundur).

4. Sistemlərin effektivlik indeksi və müxtəlif hərəkət rejimlərinin müqayisəsi. Sistemlərdə yaranmış hərəkət rejimlərini müqayisə etmək üçün müəyyən effektivlik indeksi seçilməlidir. Ən vacib indekslərdən biri hissəciklərin müəyyən nöqtədə orta gözləmə müddətidir. Kütləvi xidmət sistemlərində bu indeks tələblərin orta gözləmə müddətini ifadə edir, nəqliyyat sistemlərində sərnışinlərin, və ya nəqliyyat vahidinin orta gözləmə müddətini, informasiya sistemlərində informasiyanın orta ötürmə müddətini və s.

Eyni zamanda, əgər qapalı trayektoriya üzərində hərəkətdə olan hissəklərin hərəkət etdiyi ayrının uzunluğu vahidə bərabərdirsə, o zaman təsadüfi seçilən nöqtədə hissəciyin gözləmə müddətini istifadə edib sistemin orta sürətini tapmaq mümkündür.

Tərif 4.1. Sistemin effektivliyini müəyyən edən parametr kimi dairənin üzərində təsadüfi götürülən nöqtədə *hissəciyin orta gözləmə müddəti* qəbul olunur ($hgm_{(s)}$).

$tsr1(k)$ hərəkət rejimi üçün aşağıdakı ifadənin doğruluğunu hesablamaq asandır

$$hgm_{tsr1} = [(k-1)Q_1^2 + z_1^2] / 2V_1 \quad (4.1)$$

burada $Q_1 \leq z_1 < 2Q_1$. Buradan orta sürət üçün alırıq:

$$V_{tsr1}^* = 1/hgm_{(tsr1)} = 2V_1 / [(k-1)Q_1^2 + z_1^2].$$

Nəzərə almaq lazımdır ki, məxrəcdə dairənin bir vahidinə bərabər olan uzunluğudur, ona görə orta sürət m/san , km/san , və ya $km/saat$ vahidlərinin birində ölçülür.

Əgər $z_1 \approx Q_1$, onda $kQ_1 \approx 1$ və deməli,

$$hgm_{(tsr1)} = Q_1 / 2V_1 \quad (4.2)$$

və $V_{tsr1}^* = 2V_1 / Q_1$. Bütün sistemlər üçün fərz edilir ki,

$$Q_2 / V_2 < Q_1 / V_1 \quad (4.3)$$

onda (3.4) və (3.11)-dən belə alınır ki, əgər $z_1 \approx Q_1$ və $z_2 \approx Q_2$ aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur

$$hgm_{(tsr2)} < hgm_{(tsr1)} \quad (4.4)$$

və onda alırıq ki, $1/hgm_{(tsr2)} > 1/hgm_{(tsr1)}$. $V_{tsr2}^* > V_{tsr1}^*$ yəni $(tsr2)$ hərəkət rejiminə $(tsr1)$ -dən nisbətən üstünlük verilir, (seçilmiş səmərəlilik indeksinə və ya sistemin orta sürətinə görə).

Yuxarıda təklif olunan (3.3) şərtinin mənası ondan ibarətdir ki, əgər sistem aşağı sürətlə hərəkət edərsə, o zaman təbii ki, hissəciyin dairənin hansısa nöqtəsində gözləmə müddəti aşağı olmalıdır. Şərt (3.1) nəqliyyat sistemlərində yaranan vəziyyəti əks etdirir, yəni əgər nəqliyyat vasitələri məcburi olaraq aşağı sürətlə hərəkət edərlərsə, o zaman tələblərin orta gözləmə müddəti aşağı olur. Adətən belə hallar nəqliyyat tıxacının yaranmasından əvvəl yarana bildiyi üçün belə halları aradan qaldırmaq lazımdır.

Qeyd 4.1. (3.3)-dən çıxır ki, $(tsr1)$ hərəkət rejimində hissəciklərin sayı həmişə $(tsr2)$ -dəkindən daha çox olması faktına baxmayaraq, yenə də $hgm_{(s)}$ seçilmiş səmərəlilik indeksinə nisbi olaraq $(tsr1)$ rejiminə nisbətən $(tsr2)$ rejiminə üstünlük verilir, çünki (3.4)-də göstərildiyi kimi $hgm_{(tsr2)} < hgm_{(tsr1)}$ və eyni zamanda $V_{tsr2}^* > V_{tsr1}^*$.

Yuxarıda qeyd edilmiş qalan iki z_1 və z_2 intervallarına baxaq:

Qarışıq Sabit Rejimində (k_1-1) hissəciklər arasındakı intervallar Q_1 -ə, digər (k_2-1) hissəciklər arasındakı interval isə Q_2 -yə bərabər olur və qalan iki z_1 və z_2 intervalları üçün $Q_1 < z_1$, $z_2 < Q_2$ saxlanılır, onda seçilmiş effektivlik indeksi üçün (3.4) düsturuna oxşar olaraq alırıq:

$$hgm_{qsr} = [(k_1-1)Q_1^2 + (Q_1 + z_1)^2] + (k_2-1)Q_2^2 + (Q_2 - z_2)^2 / 2 \quad (4.5)$$

Əgər z_1 və z_2 kiçik qiymət alarsa, onda onları nəzərə alaraq və eyni zamanda $k_1Q_1 + k_2Q_2 \approx 1$ alırıq:

$$hgm_{qsr} = k_1Q_1^2 / 2V_1 + k_2Q_2^2 / 2V_2 \quad (4.6)$$

Qeyd 4.2. Əgər $k_2=0$, nəzərə alsaq ki, $k_1Q_1=1$ onda (4.6)-dan irəli gəlir $hgm_{qsr} = Q_1 / 2V_1$ və $V_{qsr}^* = 2V_1 / Q_1$ və əgər $k_1=0$, onda (4.6)-dan irəli gəlir $hgm_{qsr} = k_2Q_2^2 / 2V_2$ və nəzərə alsaq ki, $k_2Q_2=1$ onda $V_{qsr}^* = 2V_2 / Q_2$.

İsbatı. Əgər $k_2=0$, onda $k_1+k_2=k$ və $kQ_1 \approx 1$, olduğunu nəzərə alaraq, (4.6)-dan alırıq:

$$hgm_{qsr} = kQ_1^2 / 2V_1 = (kQ_1)^2 Q_1 / 2V_1 = Q_1 / 2V_1 \quad (4.7)$$

yəni $M(k,0)$ hərəkət rejiminə $(tsr1)$ -yə uyğun gəlir və $V_{qsr}^* = 2V_1 / Q_1$.

Eyni ilə, əgər $k_1=0$, onda $k_1+k_2=k$ və $kQ_2=1$ nəzərə alaraq (4.6)-dan alırıq:

$$hgm_{qsr} = kQ_2^2 / 2V_2 = (kQ_2) Q_2 / 2V_2 = Q_2 / 2V_2$$

və nəzərə alsaq ki, $k_2Q_2=1$ onda $V_{qsr}^* = 2V_2 / Q_2$ yəni $M(0,k)$ rejimi $(tsr2)$ -ə uyğun gəlir.

Qeyd 4.3. Fərz edək ki, hər hansı müəyyən k , Q_1 , Q_2 üçün sistem $M(k_1, k_2)$ hərəkət rejimində işləyir. $k_2^* > k_2$ olduğu eyni Q_1 , Q_2 qiymətlərinə malik digər bir $M(k_1^*, k_2^*)$ hərəkət rejimini nəzərdən keçirək. Onda

$$hgm_{M(k_1^*, k_2^*)} < hgm_{M(k_1, k_2)} \text{ və } V_{qsr(k_1, k_2)}^* < V_{qsr(k_1^*, k_2^*)}^*, \quad hgm_{M(k_1, k_2)} = k_1 Q_1^2 / 2V_1 + k_2 Q_2^2 / 2V_2;$$

$$hgm_{M(k_1^*, k_2^*)} = k_1^* Q_1^2 / 2V_1 + k_2^* Q_2^2 / 2V_2 = k_1 Q_1^2 / 2V_1 - m_1 Q_1^2 / 2V_1 + k_2 Q_2^2 / 2V_2 + m_2$$

$$Q_2^2 / 2V_2 < [k_1 Q_1^2 / 2V_1 + k_2 Q_2^2 / 2V_2] - m_1 Q_1^2 / 2V_1 + m_2 Q_2 Q_1 / 2V_1 = hgm_{M(k_1, k_2)} + Q_1 / 2V_1 (m_2 Q_2 - m_1 Q_1).$$

(3.5)-dən çıxır ki, $hgm_{M(k_1^*, k_2^*)} < hgm_{M(k_1, k_2)}$. Əgər $k_1^* = 0$, onda $M(k_1^*, k_2^*)$ əvəzinə biz (*tsr2*) hərəkət rejimini alırıq və Qeyd 4.3-dən çıxır ki, $hgm_{tsr2} \leq hgm_{M(k_1, k_2)}$. Əgər $k_2^* = 0$, onda $M(k_1^*, k_2^*)$ əvəzinə biz (*tsr1*) hərəkət rejimini alırıq və Qeyd 4.3-dəki fikirdən belə çıxır ki, $hgm_{ass1} \leq hgm_{M(k_1, k_2)}$. Fərz edilir ki, ε kiçik qiymətlər qəbul edir, onda $\varepsilon \approx 0$ nəzərə almayaraq, biz alırıq

$$hgm_{dsr} = (Q_1 + \varepsilon_1)^2 / 2V_2 + (Q_1 + \varepsilon_2)^2 / 2V_2 + \dots + (Q_1 + \varepsilon_k)^2 / 2V_2 \approx Q_1^2 / 2V_2$$

və (*dsr*) hərəkət rejimi üçün $kQ_1 \approx 1$ qoya biləcəyimizi nəzərə alaraq və $Q_1 < Q_2$ olduğuna görə, onda biz alırıq $Q_1 / V_2 < Q_2 / V_2 = hgm_{tsr2}$. Beləliklə, $hgm_{dsr} < hgm_{tsr2}$. Fərz edirik ki, $t=0$ (sıfır vəziyyət) üçün $\rho_{1,0} = \rho_{2,0} = \dots = \rho_{k,0} = Q_1$ və $\rho_{k,0} = 1 - (k-1)Q_1$

$$hgm_{tsr2} = [(k-1)Q_2^2 + z_1^2] / 2V_2 \quad (4.8)$$

burada

$$Q_1 < z \leq Q_2 \quad (4.9)$$

Beləliklə,

$$hgm_{tsr2} = [(k-1)Q_2^2 + z_2^2] / 2V_2 < [Q_2 - Q_2^2 + 4Q_1^2] / 2V_2 \quad (4.10)$$

əgər $z_2 \approx Q_2$ onda $kQ_2 \approx 1$ qoya bilərik və aşağıdakı düstur doğrudur:

$$hgm_{tsr2} < Q_2 / 2V_2 \quad (4.11)$$

Sıfır vəziyyətdən başlayaraq sistem (*tsr1*), (*tsr2*) və (*qsr*) hərəkət rejimlərinə çata bilər, lakin (*dsr*) hərəkət rejiminə çata bilməz. (*dsr*) hərəkət rejimi üçün hissəciklər arasında Q_1 -dən daha uzun məsafə qoymaq və onları V_2 sürətini almağa məcbur etmək lazımdır.

Bu, modelin quruluşuna zidd deyil və deməli, bu cür hərəkət rejimləri mövcud ola bilər. Bundan əlavə, təcrübədə ictimai nəqliyyatda, yeraltı qatarda və digərlərində biz bu cür arzuolunmaz hərəkət rejimləri ilə üzləşirik.

Əgər sistem yuxarıda qeyd edilmiş sıfır vəziyyətdən hərəkətə başlayırsa, onda (*tsr1*) rejiminə çatmaq üçün (3.1) ilə müəyyən edilmiş hissəciklər sayına malik olmaq lazımdır. Bu say (*tsr1*) üçün yeganədir. (*tsr2*) rejimini sıfır vəziyyətdən yaratmaq üçün hissəciklərin sayı nadir deyil.

Məsələn, əgər sistem sıfır vəziyyətdən başlayaraq (*tsr2*) hərəkət rejiminə çatdıqda hissəciklərin sayı k -dırsa, onda modelin quruluşunda (*tsr2*) rejiminə həmçinin istənilən $k^* < k$ üçün çatmaq olar. Əgər hər hansı k və t üçün doğrudur:

$$\rho_{1,t} = Q_2, V_{1,t} = V_2; \rho_{2,t} = Q_2, V_{2,t} = V_2; \dots, \rho_{k-1,t} = Q_2, V_{k-1,t} = V_2;$$

$$\rho_{s,t} = kQ_2, V_{s,t} = V_2, k \geq 1,$$

onda $(1 - (k-1)Q_2) = kQ_2 \geq Q_2$ olduğuna görə, deməli, istənilən $k^* < k$ üçün hər hansı $t^* < t$ mövcuddur, bunun nəticəsində

$$\rho_{1,t^*} = Q_2, V_{1,t^*} = V_2; \rho_{2,t^*} = Q_2, V_{2,t^*} = V_2; \dots, \rho_{k^*-1,t^*} = Q_2,$$

$$V_{k^*-1,t^*} = V_2; \rho_{k^*,t^*} = Q^*, V_{k,t^*} = V_2, \text{ burada } Q^* = (1 - (k^*-1)Q_2) > (1 - (k-1)Q_2) \geq Q_2.$$

Aşağıda biz yalnız $(k-1)$ hissəcikləri arasında məsafə Q_2 -yə bərabər olduqda və yalnız iki hissəcik arasında məsafə Q_1 -dən böyük olan qiymət aldıqda maksimal hissəcik sayına malik (*tsr2*) hərəkət rejimini nəzərdən keçirəcəyik.

Theorem 4.1. Əgər $Q_2 / V_2 < Q_1 / V_1$ onda (*sss*) hərəkət rejimi optimal rejimdir, yəni aşağıdakı əlaqə doğrudur:

$$hgm_{dsr} < hgm_{tsr2} < hgm_{M(k,k)} < hgm_{tsr1}$$

İsbati. Seçilmiş səmərəlilik indeksini (hissəciyin dairənin hər hansı nöqtəsində orta gözləmə vaxtı) müxtəlif hərəkət rejimləri ilə bağlı müqayisə edək. Q_i^* qiyməti (*dsr*) hərəkət rejimində i -ci və $(i+1)$ hissəciyi arasında məsafəsini ifadə edir. $Q_i^* < Q_2$ olduğuna görə alırıq:

$$hgm_{dsr} = (Q_1 + \varepsilon_i) / 2V_2 < Q_2 / 2V_2 = hgm_{tsr2}.$$

Deməli, $hgm_{dsr} < hgm_{tsr2}$. $hgm_{tsr2} \leq hgm_{M(k,k)} \leq hgm_{tsr1}$ münasibəti Qeyd 4.3-dən irəli gəlir.
Nəzərə alaq ki,

$$hgm_{dsr} = Q_1 / 2V_2 < Q_2 / 2V_2 = hgm_{tsr2}$$

yəni

$$hgm_{dsr} < hgm_{tsr2} \quad (4.12)$$

Qeyd 4.2 və 4.3-dən çıxır ki,

$$hgm_{dsr} \leq hgm_{M(k,k)} \leq hgm_{tsr1} \quad (4.13)$$

Görünür ki, təcrübədə ən yaxşı hərəkət rejimi doymuş müəyyən edilmiş vəziyyətdir. Təəssüflər olsun ki, bütün həqiqi sistemlərin stoxastik (determinik deyil) quruluşu var və Teorem 3.1-in nəticəsi birbaşa həqiqi sistemlərə tətbiq oluna bilməz, lakin bu müxtəlif daşınma sistemləri üçün cədvəlin planlaşdırılmasına bir eyham ola bilər.

Əgər Q_1 və Q_2 verilibsə, onda determinik sistemlər üçün, sistem ilkin (sıfır) vəziyyətdən başladıqda, biz sistemin işlədiyi bütün hərəkət rejimlərini ($tsr1$), ($tsr2$) və (qsr) (dsr -dən başqa) müəyyən etməyə imkan verən diaqram qura bilərik. Yuxarıda (bax, Şək.1) sistemin hərəkət rejimlərinin müəyyən edilməsi üçün diaqram verilmişdir.

Qeyd 4.4. Aşağıda təklif olunan bütün modellərdə vəziyyətləri müqiyəsi etmək üçün fərz edilir

$$Q_2 / V_2 < Q_1 / V_1 \quad (4.13^*)$$

Qeyd 4.5. Biz həmçinin fərz edirik ki, $k_1 \geq 1$, $k_2 \geq 1$ üçün aşağıdakı şərt saxlanılır:

$$hgm_{tsr2} \leq hgm_{M(k_1, k_2)} \quad (4.14)$$

baxmayaraq ki, ifadənin doğru olmadığı Q_1 , V_1 və Q_2 , V_2 qiymət cütləri mövcuddur. Deməli, biz yalnız barəsində (4.13*) şərtinin saxlanıldığı Q_1 , V_1 və Q_2 , V_2 , kimi qiymət cütlərini nəzərdən keçirəcəyik.

Teorem 4.2. Qurulmuş riyazi modellər üçün hərəkət sıfır rejimindən başlayarkən sabitləşmiş rejimlərə çatmaq üçün aşağıdakı şərtlər zəruri və kafidir:

1. ($tsr1$) hərəkət rejimi üçün

$$[1 - (Q_2 - Q_1)] / Q_1 < k \leq 1 / Q_1 \quad (4.15)$$

($tsr2$) hərəkət rejimi üçün

$$(1 - Q_1) / Q_2 < s < [1 + (Q_2 - Q_1)] / Q_2 \quad (4.16)$$

2. Bütün digər hallarda sistem (qsr) $M(k_1, k_2)$ -də hərəkəti üçün verilmiş Q_1 və Q_2 qiymətləri ilə diaqrama uyğun (Şək. 1) k_1 və k_2 aşağıdakı tənliklərdən müəyyən olunacaq:

$$k_1 Q_1 + k_2 Q_2 \leq 1, \quad k_1 Q_1 + (k_2 + 1) Q_2 \geq 1$$

$$1 - Q_2 \leq k_1 Q_1 + k_2 Q_2 \leq 1 \quad (4.17)$$

$$k_2 = \max\{s: (s-1)Q_2 + Q_1 < 1 \text{ və } k_1 = k - k_2\} \quad (4.18)$$

$$k_{tsr2} < k_{qsr} < k_{dsr} = k_{tsr1} \quad (4.19)$$

İsbati. Zərurilik. Aydındır ki, əgər $\rho_{k,0} = Q_1$, onda sistem ($tsr1$) hərəkət rejimində işləyir. (4.12) şərtindən çıxır ki, $Q_1 \leq \rho_{k,0} = Q^* = 1 - (k-1)Q_1 < Q_2$. Əgər $V_{1,0} = V_1$, onda sistem ($tsr1$) hərəkət rejimində işləyir. Fərz edək ki, $V_{k,t} = V_2$. Sistem sıfır vəziyyətindən başladığına görə, alırıq:

$$\rho_{1,0} = Q_1, \quad V_{1,0} = V_1; \quad \rho_{2,0} = Q_1, \quad V_{2,0} = V_1; \quad \dots, \quad \rho_{k-1,0} = Q_1, \quad V_{k-1,0} = V_1.$$

$t^* = (Q^* - Q_1) / (V_1 - V_2)$ vaxtından sonra k -cı hissəcik öz sürətini V_2 -dən V_1 -ə dəyişəcək, çünki

$$\rho_{k,t^*} Q^* t^* (V_2 - V_1) = Q_1.$$

Eyni vaxtda alırıq $\rho_{k-1,t^*} = Q_1 + t^* (V_2 - V_1) = Q^* < Q_2$.

Deməli, $(k-1)$ -ci hissəcik və bütün digər hissəciklər V_1 sürətini saxlayacaq və sistem ($tsr1$) hərəkət rejimində işləyəcək.

Zərurət. Əgər sistem sıfır vəziyyətindən başlayırsa və hər hansı t üçün sistem ($tsr1$) hərəkət rejimində işləyirsə, onda

$$\rho_{1,t} = Q_1, \quad V_{1,t} = V_1; \quad \rho_{2,t} = Q_1, \quad V_{2,t} = V_1; \quad \dots, \quad \rho_{s-1,t} = Q_1, \quad V_{k-1,t} = V_1; \quad V_{k,t} = V_1.$$

Beləliklə, $Q_1 \leq \rho_{k,t} = (1 - (k-1)Q_1) < Q_2$, çünki $V_{k,t} = V_1$. Deməli, (4.10) saxlanılır.

Kafilik. Fərz edək ki, sistem sıfır vəziyyətindən hərəkətə başlayır. Onda

$$\rho_{k,t} = (1-(k-1)Q_1) > 1-(k-1)Q_2 \text{ və } (1.3.10) \text{ saxlanıldığına görə } Q_1 < 1-(k-1)Q_2 < Q_2 + Q_1$$

Birinci hissəcik üçün biz alırıq:

$$\rho_{1,0} \geq Q_2, V_{1,0} = V_2; t^* = (Q_2 - Q_1) / (V_2 - V_1)$$

vaxtından sonra ikinci hissəcik üçün biz alacağıq $\rho_{2,t^*} = Q_2, V_{2,t^*} = V_2$. Biz (*tsr2*)-ni hissəciklərin mümkün olan maksimal sayı ilə nəzərdən keçirdiyimizə görə və (4.15) saxlanılır, onda bu proses davamlı olacaq (çünki hissəciklər arasındakı məsafə bunu etməyə imkan verir və sonda alırıq:

$$\rho_{1,t^*} = Q_2, V_{1,t^*} = V_2; \rho_{2,t^*} = Q_2, V_{2,t^*} = V_2, \dots, \rho_{k-1,t^*} = Q_2, V_{k-1,t^*} = V_2; \rho_{k,t^*} = Q^*,$$

burada $Q_1 < Q^* < Q_2$ və deməli $V_{k,t^*} = V_2$.

Bu o deməkdir ki, sistem (*tsr2*) rejiminə çatmışdır. Bundan əlavə, (*tsr2*) rejiminə $(k-1)(Q_2 - Q_1) / (V_2 - V_1)$ vaxtından sonra çatmaq mümkün olacaq.

Zərurilik. Əgər sistem maksimal sayda hissəciklərlə (*tsr2*)-də işləyirsə, onda

$$\rho_{1,t} = Q_2, V_{1,t} = V_2; \rho_{2,t} = Q_2, V_{2,t} = V_2; \dots, \rho_{s-1,t} = Q_2, V_{s-1,t} = V_2; \rho_{s,t} = Q^*, \text{ və } Q_1 < Q^* < Q_2.$$

Deməli, yuxarıda (*tsr2*) üçün qeyd edildiyi kimi,

$\rho_{1,0} \geq Q_2, V_{1,0} = V_2, t^* = (Q_2 - Q_1) / (V_2 - V_1)$ vaxtından sonra ikinci hissəcik üçün biz $\rho_{2,t^*} = Q_2, V_{2,t^*} = V_2$ alırıq. Bu proses k_2 hissəciklərinin V_2 sürəti aldıkları t^{**} vaxt anına qədər davam edəcək və məsafələr üçün alınır:

$$Q_1 < \rho_{s,t^{**}} < Q_2, V_{k,t^{**}} = V_2; \rho_{k-1,t^{**}} = Q_2, V_{k-1,t^{**}} = V_2, \dots, \rho_{k-k_1,t^{**}} = Q_2, V_{k-k_1,t^{**}} = V_2;$$

$$\rho_{k-k_1-1,t^{**}} = Q_1, V_{k-k_1-1,t^{**}} = V_1, \dots, \rho_{2,t^{**}} = Q_1, V_{2,t^{**}} = V_1;$$

yəni sistem $M(k_1, k_2)$ qarışıq rejimində hərəkət edir.

Zərurilik. Əgər sistem $M(k_1, k_2)$ qarışıq hərəkət rejimində işləyirsə və hərəkətə sıfır vəziyyətindən başlayıbsa, onda $t = (Q_2 - Q_1) / (V_2 - V_1)$ zamanı keçdikdən sonra k -cı hissəciyin sürəti V_2 -dən V_1 -ə dəyişəcək, çünki

$(k-1)$ və k -nömrəli hissəciklərin arasındakı məsafə Q_2 -yə bərabər olacaq. Eyni ilə, $t = 2(Q_2 - Q_1) / (V_2 - V_1)$ vaxtından sonra $(k-1)$ sayılı hissəcik sürətini V_2 -yə dəyişəcək. Bu proses s -ci hissəcikdən birinci hissəciyə qədər olan məsafəsi Q_1 -dən çox olduğu müddətdə davam edəcək. Sürətini V_1 -dən V_2 -yə dəyişmiş hissəciklərin sayı (4.17) tənliyi ilə müəyyən edilir.

Misal 4.1. $k=30$ və $Q_1=1/30, V_1=1$. Onda sıfır vəziyyətindən başlayaraq sistem (*tsr1*) hərəkət rejiminə çatacaq və $hgm_{tsr1} = 1/60 = 0.0167$. Əgər $k=20$ və $Q_2=1/20, V_2=2$, onda sıfır vəziyyətindən başlayaraq sistem (*tsr2*) hərəkət rejiminə çatacaq və $hgm_{tsr2} = 1/80 = 0.0125$.

Əgər $k=12$ və $Q_1=1/30, Q_2=1/20, V_1=1, V_2=2$, onda sıfır vəziyyətindən başlayaraq sistem $M(3,9)$ hərəkət rejiminə çatacaq və $hgm_{M(3,12)} = 0.0129$. (*dssr*) hərəkət rejimi üçün alırıq: $Q_1=1/30, Q_2=1/20, V_1=1, V_2=2, \varepsilon_1 = (1/30)/29 = 1/870, Q_1 + \varepsilon_1 = 1/29, wst_{sss} = 0,009, Q_1/V_1 < Q_2/V_2$ şərti saxlanılır ($1/30 < 1/20$). Sadə hesablamalar aşağıdakıları əmələ gətirir: $hgm_{dssr} = 0.009 < hgm_{tsr2} = 0.0125 < hgm_{M(3,12)} = 0.0129 < hgm_{tsr1} = 0.0167$

Aparılan sadə hesablamalar nəticəsində müxtəlif hərəkətdə olan hissəciklərin rejimlərinin müqayisəsi orta gözləmə vaxtında artım verilməsi aşağıda təqdim olunur

(*dssr*) ilə (*tsr2*) 25%-dir; (*dssr*) ilə $M(3,12)$ 30%-dir; (*dssr*) ilə (*tsr1*) 46%-dir; (*tsr2*) ilə $M(3,12)$ 3.2%%-dir; (*tsr2*) ilə (*tsr1*) 26%-dir; $M(3,12)$ ilə (*tsr1*) 22%-dir.

Digər rejimlərlə müqayisədə (*dssr*) rejimindən istifadə etməklə maksimal artım 44%-dir, lakin (*tsr2*) rejiminin (*tsr1*) ilə müqayisəsi əgər V_2 daha yüksək qiymət alırsa, onda orta gözləmə müddətindəki artımda daha yüksək ola bilər. Yuxarıda qeyd olunan nəticələri ədədi misallar üzərində nümayiş etdirmək orta gözləmə müddətində alınan uduşu daha qabarıq şəkildə göstərir.

Misal 4.2. Gəlin $k=30$ qoyaq və $Q_1=1/30, V_1=1$. Onda sıfır vəziyyətindən başlayaraq sistem (*ass1*) hərəkət rejiminə çatır və $hgm_{tsr1} = 1/60 = 0.0167$. Əgər $k=20$ və $Q_2=1/20, V_2=4$, onda sıfır vəziyyətindən başlayaraq sistem (*tsr2*) hərəkət rejiminə çatır və $hgm_{tsr2} = 1/160 = 0.0062$. Əgər $k=22$ və $Q_1=1/30, Q_2=1/20, V_1=1, V_2=4$, onda sıfır vəziyyətindən başlayaraq sistem $M(6,16)$ -ya çatır və

$hgm_{M(6,16)}=0.0088$. (dsr) hərəkət rejimi üçün biz $Q_1=1/30$, $Q_2=1/20$, $V_1=1$, $V_2=4$, $\varepsilon_i = (1/30)/29=1/870$, $Q_1+\varepsilon_i=1/29$, $hgm_{dsr}=0,0045$ alırıq. $Q_1/V_1 < Q_2/V_2$ şərti saxlanılır ($1/30 < 1/20$). Sadə hesablamalar aşağıdakıları əmələ gətirir:

$$hgm_{dsr}=0.0045 < dsr_{tsr2}=0.0062 < hgm_{M(6,16)}=0.0088 < hgm_{tsr1}=0.016$$

Müxtəlif hərəkət rejimlərinin müqayisəsi orta gözləmə vaxtında artım verir:

(dsr) ilə ($tsr1$) 72%-dir; (dsr) ilə $M(6,16)$ 49%-dir; (dsr) ilə ($tsr2$) 46%-dir; ($tsr2$) ilə $M(3,12)$ 29%-dir; ($tsr2$) ilə ($tsr1$) 61%-dir; $M(6,16)$ ilə ($tsr1$) 45%-dir

Beləliklə, əgər V_2/V_1 artırsa, onda artım da çoxalır.

5. Nəticə. Dairə üzərində hərəkət edən hissəciklərin riyazi modelləri qurulub və belə modellərdə yaranan vəziyyətlər tapılıb. Yaranan vəziyyətləri müqayisə etmək üçün effektivlik indeksi kimi dairənin təsadüfi seçilmiş nöqtəsində hissəciyin orta gözləmə müddəti götürülüb. Yaranan vəziyyətləri müəyyən etmək üçün xüsusi diaqram təklif olunur. Seçilmiş effektivlik indeksini minimumlaşdıran optimal vəziyyət tapılıb.

Alınan nəticələr nəqliyyat, rabitə və digər sistemlərdə optimal vəziyyətlərin tapılmasında və sistemin optimal vəziyyətində hərəkət etməsində istifadə oluna bilər.

Ədəbiyyat

1. Kerner B.S. Introduction to Modern Traffic Flow Theory and Control. Berlin: Springer, 2009.
2. Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А. и др. Введение в математическое моделирование транспортных потоков. М.: Изд-во МФТИ, 2010. - 363 с.
3. Blank Michael. Dynamics of traffic jams: order and chaos. Moscow Math. J. 2001, № 1 p.1-26.
4. Гаджиев А.Г., Маммадов Т.Ш. Математические модели движущихся частиц и их приложения. LAMBERT, Academic Publishing, 2013, 134с.
5. Nagel K., Wagner R., Woessler R. Still flowing: Approaches to traffic flow and traffic jam modelling. Oper.Research 51 (5), 2003, p.681-710.
6. Беляев Ю.К. Об упрощенной модели движения без обгона. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, №3, 1969, с.17-21.
7. Целе У. Обобщение модели движения без обгона. // Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, №5, 1972, с.100-103.
8. Беляев Ю.К., Буслаев А.П., Селезнев О.В., Таташев А.Г., Яшина М.В. Марковская аппроксимация стохастической модели движения по двум полосам. М., МАДИ, 2002.
9. Гаджиев А.Г. О случайном блуждании частиц по кольцу. Матем. заметки, №6, т. 47, 1990, с.140-143.
10. Hacıyev A.H., Mammadov T.Sh. Математические модели движущихся частиц и их приложения. Журнал им. А.Н.Колмогорова. Теория вер. применения. 2011, v.56, №4, с.1-14.
11. Hacıyev A.H., Mammadov T.Sh., Abdullayeva N.A. Proceed. VI Intern. Conf. MSEM, Islamabad, Springer, ser. Electrical Engineering, 2012.
12. Гаджиев А. Г., Мамедов Т. Ш. Циклические системы с задержкой обслуживания. ДАН России, Математика, 2009, №1.

N.A. Abdullayeva

Mathematical models of particles moving in circle

The mathematical models of moving particles describing a behavior of various systems (traffic, communication and others) are constructed and investigated. Different modes of movement in these systems are found. The diagram that allows finding various modes of movement is given. To compare various modes of movement, an efficiency index is introduced. An optimal movement mode minimizing the selected efficiency index was found..

Keywords: mathematical models of particles, fixed mode, full fixed mode, mixed fixed mode, saturated fixed mode, zero position, efficiency index

УДК 519.2

Н.А. Абдуллаева

Математические модели частиц, движущихся по кругу

Математические модели, описывающие поведение различных систем (транспорт, связь, коммуникационные системы и др.) построены и исследованы. Описаны различные режимы движения, возникающие в этих системах. Предложена диаграмма, позволяющая определить режимы движения. Для сравнения различных режимов движения вводится индекс эффективности. Найден оптимальный режим движения, минимизирующий выбранный показатель эффективности.

Ключевые слова: математические модели частиц, стабильный режим, полностью стабильный режим, насыщенный стабильный режим, нулевое положение, индекс эффективности

AMEA İdarəetmə Sistemləri İnstitutu

Təqdim olunub 13.12.2018